פרק ג': כפל וחילוק

בניגוד להגדרת החיבור, לא רק של המספרים אלא גם של כל המשחקים, שהינה טבעית ופשוטה וקל להוכיח את תכונותיה, הגדרת הכפל של המספרים אינה פשוטה כלל וכלל וקונוויי טרח רבות עד שמצא הגדרה מתאימה. מה צריכות להיות האופציות השמאליות של המכפלה xy? כל עוד אנו עוסקים במספרים חיוביים טבעי להניח שאלו תהיינה המשחקים x^Ly^L, כאשר ההגדרה היא ברקורסיה והמכפלה x^Ly^L כבר מוגדרת. מתברר שלא די באופציות שמאליות אלו כי המשחקים x^Ly^L אינם בהכרח קרובים מספיק ל-xy, ואנו נשתמש באופציות השמאליות שבעיקרון הן $xy-(x-x^L)(y-y^L)$, ואנו נשתמש בפיתוח שלהן $xy^L+x^Ly-x^Ly^L$ שכל רכיביו כבר מוגדרים בתהליך הרקורסיה, ובאופן דומה באופציות שמאליות נוספות $xy-(x^R-x)(y^R-y)$ בפיתוח $xy^R+x^Ry-x^Ry^R$, ובאופציות הימניות $xy+(x-x^L)(y^R-y)$ בפיתוח $xy^R+x^Ly-x^Ly^R$ ו- $xy+(x^R-x)(y-y^L)$ בפיתוח $xy^L+x^Ry-x^Ly^R$. לאור זאת נגדיר את הכפל ונוכיח את תכונותיו. הכפל מעניין אותנו רק למספרים ולא למשחקים כלליים יותר, אבל היכן שאפשר נעשה זאת למשחקים כלשהם כדי לראות היכן אנו משתמשים בתכונות המיוחדות של המספרים.

3.1 פעולת הכפל. הכפל של משחקים מוגדר ע"י

$$xy \equiv \{x^Ly+xy^L-x^Ly^L, x^Ry+xy^R-x^Ry^R \mid x^Ly+xy^R-x^Ly^R, x^Ry+xy^L-x^Ry^L\}$$

זאת הגדרה ברקורסיה, על הגרף שהיחס $\rightarrow$ שלו נתון ע"י $\langle x,y\rangle \rightarrow \langle x',y'\rangle$ אסם $x'\widetilde{\in}x$ ו- $y=y'$ או $y'\widetilde{\in}y$ ו- $x=x'$ או $x'\widetilde{\in}x$ ו- $y'\widetilde{\in}y$. קל לראות שזהו גרף מבוסס היטב.

3.2 משפט. למשחקים x,y כלשהם

א. $x0=0$. ב. $x1=x$. ג. $xy=yx$. ד. $(-x)y=x(-y)=-xy$.

הוכחה. א. כל אופציה של xy מכילה כמחובר כפולה של אופציה של y ובמקרה בו y היא 0 אין ל-y אופציות ולכן אין אופציות ב-xy, כלומר $xy=0$.

ב. באינדוקציה על x. לפי הגדרת הכפל קיים $x1=x\{0\mid\}=\{x^L1+x0-x^L0 \mid x^R1+x0-x^L0\}$, ולפי א' והנחת האינדוקציה זה שווה ל- $\{x^L \mid x^R\}$, כלומר ל-x.

ג. באינדוקציה על x,y. לאור קומוטטיביות החיבור, החלפת x ב-y באופציות של xy משנה אותן רק בכך שהיא מחליפה את סדר הכופלים במכפלות $x^Ly^L, x^Ry^R, x^Ly^R, x^Ry^L$, ולפי הנחת האינדוקציה החלפת סדר זאת אינה משנה את ערכם.

ד. באינדוקציה על x,y.

$$\begin{aligned}(-x)y=\{&(-x^R)y+(-x)y^L-(-x^R)y^L\,,\ (-x^L)y+(-x)y^R-(-x^L)y^R \mid \\ &(-x^R)y+(-x)y^R-(-x^R)y^R\,,\ (-x^L)y+(-x)y^L-(-x^L)y^L\}\end{aligned}$$

ולפי הנחת האינדוקציה ו-2.14 זה שווה

ל- $\{-x^Ry-xy^L+x^Ry^L\,,\ -x^Ly-xy^R+x^Ly^R \mid -x^Ry-xy^R+x^Ry^R\,,\ -x^Ly-xy^L+x^Ly^L\}$,

ואפשר לכתוב אותו כ-

$\{-(x^Ry+xy^L-x^Ry^L)\,,\ -(x^Ly+xy^R-x^Ly^R) \mid -(x^Ry+xy^R-x^Ry^R)\,,\ -(x^Ly+xy^L-x^Ly^L)\}$.

האופציות השמאליות של משחק זה הן השלילות של האופציות הימניות של xy, והאופציות הימניות של משחק זה הן השלילות של האופציות השמאליות של xy, ולכן זהו המשחק $-xy$.

3.3 משפט. למשחקים x,y,z כלשהם קיים: א. $(x+y)z\equiv xy+xz$. ב. $(xy)z\equiv x(yz)$.

הוכחה. א. באינדוקציה על x,y,z. כאשר נפתח את $(x+y)z$ ונפגוש בביטוי מהסוג $(x'+y')z'$, בו x' הוא x או אופציה של x, וכן ל-y' ול-z', ואשר בו לפחות אחד מ- x',y',z' הוא אופציה של המשחק המתאים אז נשתמש בהנחת האינדוקציה ונחליף את $(x'+y')z'$ במשחק השקול לו $x'z'+y'z'$, ולפי 2.33ה' זה לא ישנה את מחלקת השקילות של המשחק. כאשר נעשה זאת לא נזכיר שוב את השימוש בהנחת האינדוקציה.

$$\begin{aligned}(x+y)z\equiv\{&(x+y)^Lz+(x+y)z^L-(x+y)^Lz^L\,,\ (x+y)^Rz+(x+y)z^R-(x+y)^Rz^R \mid \\ &(x+y)^Lz+(x+y)z^R-(x+y)^Lz^R\,,\ (x+y)^Rz+(x+y)z^L-(x+y)^Rz^L\}\\ \equiv\{&x^Lz+yz+xz^L+yz^L-x^Lz^L-yz^L\,,\ xz+y^Lz+xz^L+yz^L-xz^L-y^Lz^L,\end{aligned}$$

$$x^Rz+yz+xz^R+yz^R-x^Rz^R-yz^R\,,\,xz+y^Rz+xz^R+yz^R-xz^R-y^Rz^R\mid$$
$$x^Lz+yz+xz^R+yz^R-x^Lz^R-yz^R\,,\,xz+y^Lz+xz^R+yz^R-xz^R-y^Lz^R,$$
$$x^Rz+yz+xz^L+yz^L-x^Rz^L-yz^L\,,\,xz+y^Rz+xz^L+yz^L-xz^L-y^Rz^L\}$$

ובהשמטת מחוברים נגדיים בסכומים השונים, ופעולה זאת שומרת את מחלקת השקילות של המשחק, אנו מקבלים

$$\equiv\{x^Lz+yz+xz^L-x^Lz^L\,,\,xz+y^Lz+yz^L-y^Lz^L,$$
$$x^Rz+yz+xz^R-x^Rz^R\,,\,xz+y^Rz+yz^R-y^Rz^R\mid$$
$$x^Lz+yz+xz^R+-x^Lz^R\,,\,xz+y^Lz+yz^R-y^Lz^R,$$
$$x^Rz+yz+xz^L-x^Rz^L\,,\,xz+y^Rz+yz^L-y^Rz^L\}$$
$$\equiv\{(xz)^L+yz\,,\,xz+(yz)^L\mid(xz)^R+yz\,,\,xz+(yz)^R\}$$
$$=xz+yz$$

ב. באינדוקציה על x,y,z. כאשר נפתח את $(xy)z$ ונפגוש בביטוי מהסוג $(x'y')z'$, בו x' הוא x או אופציה של x, וכן ל-y' ול-z', ואשר בו לפחות אחד מ- x',y',z' הוא אופציה של המשחק המתאים אז נשתמש בהנחת האינדוקציה ונכתוב $x'y'z'$ במקום $(x'y')z'$, מבלי שנזכיר שוב את השימוש בהנחת האינדוקציה. בפיתוח $(xy)z$ נשתמש גם באופן חופשי בחוק הפילוג שהוכח בחלק א'.

$$(xy)z=\{(xy)^Lz+xyz^L-(xy)^Lz^L\,,\,(xy)^Rz+xyz^R-(xy)^Rz^R\mid$$
$$(xy)^Lz+xyz^R-(xy)^Lz^R\,,\,(xy)^Rz+xyz^L-(xy)^Rz^L\}$$
$$\equiv\{(x^Ly+xy^L-x^Ly^L)z+xyz^L-(x^Ly+xy^L-x^Ly^L)z^L,$$
$$(x^Ry+xy^R-x^Ry^R)z+xyz^L-(x^Ry+xy^R-x^Ry^R)z^L,$$
$$(x^Ly+xy^R-x^Ly^R)z+xyz^R-(x^Ly+xy^R-x^Ly^R)z^L,$$
$$(x^Ry+xy^L-x^Ry^L)z+xyz^R-(x^Ry+xy^L-x^Ry^L)z^R\mid$$
$$(x^Ly+xy^L-x^Ly^L)z+xyz^R-(x^Ly+xy^L-x^Ly^L)z^R,$$
$$(x^Ry+xy^R-x^Ry^R)z+xyz^R-(x^Ry+xy^R-x^Ry^R)z^R,$$
$$(x^Ly+xy^R-x^Ly^R)z+xyz^L-(x^Ly+xy^R-x^Ly^R)z^L,$$
$$(x^Ry+xy^L-x^Ry^L)z+xyz^L-(x^Ry+xy^L-x^Ry^L)z^L\}$$

חישוב של ביטוי זה נותן משחק שכל האופציות שלו הן בעלות הצורה
$x^ayz+xy^bz+xyz^c-xy^bz^c-x^ayz^c-x^ay^bc+x^ay^bz^c$, היכן שעבור האופציות השמאליות השלשה $\langle a,b,c\rangle$ היא $\langle L,L,L\rangle$, $\langle L,R,R\rangle$, $\langle R,L,R\rangle$ ו- $\langle R,R,L\rangle$, ועבור האופציות הימניות השלשה $\langle a,b,c\rangle$ היא $\langle R,R,R\rangle$, $\langle R,L,L\rangle$, $\langle L,R,L\rangle$ ו- $\langle L,L,R\rangle$. זה ביטוי סימטרי ביחס למיקום הסוגרים ואותו ביטוי מתקבל גם כאשר יוצאים מ- $x(yz)$.

3.4 משפט. אם x ו-y מספרים אז גם xy הוא מספר.

הוכחה. נסדר את הזוגות הלא-סדורים של הסודרים כדלקמן. יהיו $\{\alpha,\beta\}$ ו- $\{\alpha',\beta'\}$ זוגות סודרים בהם קראנו בשם α ו- α' לסודרים המירביים בכל זוג. נגדיר כי $\{\alpha,\beta\}<\{\alpha',\beta'\}$ אם $\alpha<\alpha'$ או אם $\alpha=\alpha'$ ו- $\beta<\beta'$. המשפט יוכח באינדוקציה כדלקמן. הנחת האינדוקציה היא הבאה ונקרא לה **הנחת האינדוקציה הבסיסית**. ל- α,β לכל x,y אם $\{\rho(x),\rho(y)\}<\{\alpha,\beta\}$ אז xy הוא מספר. צעד האינדוקציה הוא שנצא מהנחת האינדוקציה הבסיסית ונוכיח כי גם לכל x,y אם $\{\rho(x),\rho(y)\}=\{\alpha,\beta\}$ אז xy הוא מספר. במסגרת הוכחת צעד האינדוקציה נוכיח את למה 3.6 המבוססת על הנחת האינדוקציה הבסיסית.

נתחיל במספר סימונים. ברור כי שלושת אי-השוויונות הבאים הם שקולים $x_1y_2+x_2y_1<x_1y_1+x_2y_2$ (1)

(2) $x_1y_1-x_2y_1>x_1y_2-x_2y_2$

(3) $x_1y_1-x_1y_2>x_2y_1-x_2y_2$

נסמן אותם ב- $P_<(x_1,x_2;y_1,y_2)$.

אותם אי-שוויונים עם $\le$ ו-$\ge$ במקום $<$ ו-$>$ גם הם שקולים ונסמן אותם ב- $P_\le(x_1,x_2;y_1,y_2)$.

ברור כי $P_<(x_1,x_2;y_1,y_2)$ שקול ל- $P_<(y_1,y_2;x_1,x_2)$ ול- $P_<(x_2,x_1;y_2,y_1)$, וכן גם ל-$P_\le$.

3.5 למה. עבור x_1,x_2 קבועים היחסים $P_<(x_1,x_2;y_1,y_2)$ ו- $P_\le(x_1,x_2;y_1,y_2)$ בין y_1 ל-y_2 הם כמו $<$ ו-$\le$ מבחינת הטרנזיטיביות (לאור הצורות (2) ו-(3)). הוא הדין ליחסים בין x_1 ו-x_2 כאשר y_1,y_2 קבועים.

כעת נוכיח את הלמה הבאה המבוססת על הנחת האינדוקציה הבסיסית.

למה 3.6. למספרים x, y_1, y_2 אם $\{\alpha,\beta\} < \{\rho(x), \max(\rho(y_1),\rho(y_2))\}$ אז:

א. אם $y_1 \equiv y_2$ אז $xy_1 \equiv xy_2$.

ב. אם $y_1 < y_2$ אז $P_<(x^L, x; y_1, y_2)$ ו- $P_<(x, x^R; y_1, y_2)$.

ג. אם $y_1 \leq y_2$ אז $P_\leq(x^L, x; y_1, y_2)$ ו- $P_\leq(x, x^R; y_1, y_2)$.

הוכחה. נוכיח את חלקי הלמה יחד באינדוקציה על x, y_1, y_2.

א. לאור הסימטריה בהנחה די להוכיח כי $xy_1 \leq xy_2$. לפי 2.33 די להוכיח לשם כך ש- xy_1 קטן מהאופציות הימניות של xy_2 ושהאופציות השמאליות של xy_1 קטנות מ- xy_2, וזאת משום שלפי הנחת האינדוקציה הבסיסית xy_1, xy_2 והאופציות שלהם הם מספרים. לכן עלינו להוכיח את ארבעת אי-השיוויונות הבאים.

$$(1) \quad xy_1 < x^L y_2 + xy_2^R - x^L y_2^R$$
$$(2) \quad xy_1 < x^R y_2 + xy_2^L - x^R y_2^L$$
$$(3) \quad x^L y_1 + xy_1^L - x^L y_1^L < xy_2$$
$$(4) \quad x^R y_1 + xy_1^R - x^R y_1^R < xy_2$$

נטפל באי-שיוויונות אלו אחד לאחד.

ב-(1) מופיע המחובר $x^L y_2$. לפי הנחת האינדוקציה א' קיים $x^L y_1 = x^L y_2$, ואם נחליף את $x^L y_2$ באי-שיוויון זה ב- $x^L y_1$ ונעביר מאגף לאגף נקבל את $P_<(x^L, x; y_1, y_2^R)$, ומכיוון ש- $y_1 = y_2 < y_2^R$, אי-שיוויון זה קיים לפי הנחת האינדוקציה ב'.

ב-(2) מופיע המחובר $x^R y_2$. לפי הנחת האינדוקציה א' קיים $x^R y_1 = x^R y_2$, ואם נחליף את $x^R y_2$ באי-שיוויון זה ב- $x^R y_1$ ונעביר מאגף לאגף נקבל את $P_<(x, x^R; y_2^L, y_1)$, ומכיוון ש- $y_2^L < y_2 = y_1$, אי-שיוויון זה קיים לפי הנחת האינדוקציה ב'.

ב-(3) מופיע המחובר $x^L y_1$. לפי הנחת האינדוקציה א' קיים $x^L y_1 = x^L y_2$, ואם נחליף את $x^L y_1$ באי-שיוויון זה ב- $x^L y_2$ ונעביר מאגף לאגף נקבל את $P_<(x^L, x; y_1^L, y_2)$, ומכיוון ש- $y_1^L < y_1 = y_2$, אי-שיוויון זה קיים לפי הנחת האינדוקציה ב'.

ב-(4) מופיע המחובר $x^R y_1$. לפי הנחת האינדוקציה א' קיים $x^R y_1 = x^R y_2$, ואם נחליף את $x^R y_1$ באי-שיוויון זה ב- $x^R y_2$ ונעביר מאגף לאגף נקבל את $P_<(x, x^R; y_2, y_1^R)$, ומכיוון ש- $y_2 = y_1 < y_1^R$, אי-שיוויון זה קיים לפי הנחת האינדוקציה ב'.

ב. מכיוון ש- $y_1 < y_2$ קיים, לפי 2.33, $y_1 < y_1^R \leq y_2$ או $y_1 \leq y_2^L < y_2$.

(1). נניח כי $y_1 < y_1^R \leq y_2$. כדי להוכיח את $P_<(x^L, x; y_1, y_2)$ די, לפי 3.5, להוכיח כי $P_<(x^L, x; y_1, y_1^R)$ ו- $P_\leq(x^L, x; y_1^R, y_2)$. $P_\leq(x^L, x; y_1^R, y_2)$ קיים לפי הנחת האינדוקציה. כשמעבירים מאגף לאגף ב- $P_<(x^L, x; y_1, y_1^R)$ מקבלים $xy_1 < x^L y_1 + xy_1^R - x^L y_1^R$, וזה אומר ש- xy_1 קטן מאופציה ימנית שלו, וזה נובע מהנחת האינדוקציה הבסיסית ש- xy_1 הוא מספר.

את $P_<(x, x^R; y_1, y_2)$ מוכיחים באותו אופן ובסוף מקבלים את אי-השיוויון $x^R y_1 + xy_1^R - x^R y_1^R < xy_1$ האומר ש- xy_1 גדול מאופציה שמאלית שלו.

(2). כעת נניח כי $y_1 \leq y_2^L < y_2$. כדי להוכיח את $P(x^L, x; y_1, y_2)$ די, לפי 3.5, להוכיח כי $P_\leq(x^L, x; y_1, y_2^L)$ ו- $P_<(x^L, x; y_2^L, y_2)$. $P_\leq(x^L, x; y_1, y_2^L)$ קיים לפי הנחת האינדוקציה. כשמעבירים מאגף לאגף ב- $P(x^L, x; y_2^L, y_2)$ מקבלים את אי-השיוויון $x^L y_2 + xy_2^L - x^L y_2^L < xy_2$ האומר ש- xy_2 גדול מאופציה שמאלית שלו, וזה נובע מהנחת האינדוקציה הבסיסית ש- xy_2 הוא מספר.

את $P_<(x, x^R; y_1, y_2)$ מוכיחים באותו אופן ובסוף מקבלים את אי-השיוויון $xy_2 < x^R y_2 + xy_2^R - x^R y_2^L$, וזה אומר ש- xy_2 קטן מאופציה ימנית שלו.

ג. אם $y_1 < y_2$ אז, לפי ב', $P_<(x^L, x; y_1, y_2)$ ו- $P_<(x, x^R; y_1, y_2)$, ובוודאי ש- $P_\leq(x^L, x; y_1, y_2)$ ו- $P_\leq(x, x^R; y_1, y_2)$. אם $y_1 = y_2$ אז $P_\leq(x^L, x; y_1, y_2)$ נובע מן השיווין $x^L y_1 = x^L y_2$ הנובע מהנחת האינדוקציה ומן השוויון $xy_1 = xy_2$ הנובע מ-א', וכן ביחס ל- $P_\leq(x, x^R; y_1, y_2)$.

3.7 הסימון $f_{x,y}(u,v)$. נסמן $f_{x,y}(u,v) = xv + yu - uv$, והיכן שנעסוק ב- x, y קבועים ו- u, v משתנים נכתוב $f(u,v)$ במקום $f_{x,y}(u,v)$.

בסימון זה קיים $xy = \{f(x^L, y^L), f(x^R, y^R) \mid f(x^L, y^R), f(x^R, y^L)\}$.

קיים: $f_{x,y}(u,w) < f_{x,y}(u,v)$ אסם $P_<(u,x;v,w)$, כפי שמתקבל ישירות מפיתוח $f_{x,y}(u,v) < f_{x,y}(u,w)$.
כתוצאה מכך אפשר לנסח את 3.6ב' ו-ג' כך:

ב. אם $y_1 < y_2$ אז $f_{x,y}(x^L, y_1) < f_{x,y}(x^L, y_2)$, כלומר $f_{x,y}(x^L, z)$ היא פונקציה עולה של z, וגם $f_{x,y}(x^R, y_1) < f_{x,y}(x^R, y_2)$, כלומר $f_{x,y}(x^R, z)$ היא פונקציה יורדת של z, וכל זאת כל עוד $\{\rho(x), \rho(z)\} < \{\alpha, \beta\}$.
כמו כן $f_{x,y}(z, y^L)$ היא פונקציה עולה של z ו- $f_{x,y}(z, y^R)$ היא פונקציה יורדת של z, וזאת כל עוד $\{\rho(y), \rho(z)\} < \{\alpha, \beta\}$.

ג. כמו ב' עם $\leq$ במקום $<$, כלומר הפונקציות $f_{x,y}(x^L, z)$, $f_{x,y}(x^R, z)$, $f_{x,y}(z, y^L)$, ו- $f_{x,y}(z, y^R)$ הן פונקציות אדישות לשקילות ב-z.

המשך הוכחת 3.4. ברור כי, לפי הנחת האינדוקציה הבסיסית, כל האופציות של xy הן מספרים. לכן כל מה שעלינו להוכיח הוא שהאופציות השמאליות של xy קטנות מהאופציות הימניות של xy, ולשם כך עלינו להוכיח את ארבעת אי-השוויונות (1) עד (4) הבאים.

(1) $f(x_*^L, y^L) < f(x_{**}^L, y^R)$, היכן ש-$x_*^L$ ו-x_{**}^L הן שתי אופציות שמאליות, לאו דווקא שוות, של x.
אם $x_*^L \leq x_{**}^L$ אז (1) נובע מאי-השוויונות $f(x_*^L, y^L) \leq f(x_{**}^L, y^L) < f(x_{**}^L, y^R)$, הקיימים לפי תכונות f.
אם $x_{**}^L \leq x_*^L$ אז (1) נובע מאי-השוויונות $f(x_*^L, y^L) < f(x_*^L, y^R) \leq f(x_{**}^L, y^R)$, הקיימים לפי תכונות f.

(2) $f(x^L, y_*^L) < f(x^R, y_{**}^L)$, היכן ש-$y_*^L$ ו-y_{**}^L הן שתי אופציות שמאליות, לאו דווקא שוות, של y.
אם $y_*^L \leq y_{**}^L$ אז (2) נובע מאי-השוויונות $f(x^L, y_*^L) \leq f(x^L, y_{**}^L) < f(x^R, y_{**}^L)$, הקיימים לפי תכונות f.
אם $y_{**}^L \leq y_*^L$ אז (2) נובע מאי-השוויונות $f(x^L, y_*^L) < f(x^R, y_*^L) \leq f(x^R, y_{**}^L)$, הקיימים לפי תכונות f.

(3) $f(x^R, y_*^R) < f(x^L, y_{**}^R)$, היכן ש-$y_*^R$ ו-y_{**}^R הן שתי אופציות ימניות, לאו דווקא שוות, של y.
אם $y_*^R \leq y_{**}^R$ אז (3) נובע מאי-השוויונות $f(x^R, y_*^R) < f(x^L, y_*^R) \leq f(x^L, y_{**}^R)$, הקיימים לפי תכונות f.
אם $y_{**}^R \leq y_*^R$ אז (3) נובע מאי-השוויונות $f(x^R, y_*^R) \leq f(x^R, y_{**}^R) < f(x^L, y_{**}^R)$, הקיימים לפי תכונות f.

(4) $f(x_*^R, y^R) < f(x_{**}^R, y^L)$, היכן ש-$x_*^R$ ו-x_{**}^R הן שתי אופציות ימניות, לאו דווקא שוות, של x.
אם $x_*^R \leq x_{**}^R$ אז (4) נובע מאי-השוויונות $f(x_*^R, y^R) < f(x_*^R, y^L) \leq f(x_{**}^R, y^L)$, הקיימים לפי תכונות f.
אם $x_{**}^L \leq x_*^L$ אז (4) נובע מאי-השוויונות $f(x_*^R, y^R) \leq f(x_{**}^R, y^R) < f(x_{**}^R, y^L)$, הקיימים לפי תכונות f.

3.8 משפט. א. אם $x_1 \equiv x_2$ אז $x_1 y \equiv x_2 y$.
ב. אם $x_1 < x_2$ ו- $y_1 < y_2$ אז $P_<(x_1, x_2; y_1, y_2)$, כלומר $x_1 y_2 + x_2 y_1 < x_1 y_1 + x_2 y_2$.
ג. אם $x_1 \leq x_2$ ו- $y_1 \leq y_2$ אז $P_\leq(x_1, x_2; y_1, y_2)$, כלומר $x_1 y_2 + x_2 y_1 \leq x_1 y_1 + x_2 y_2$.

הוכחה. משהוכחנו את משפט 3.4 אז ההנחה הבסיסית שביסוד 3.6 קיימת לכל α, β, ולכן הכתוב ב-3.6 נכון לכל x, y_1, y_2. לכן א' מוכח. את ב' וג' נוכיח יחד באינדוקציה כדלקמן.
ב'. מכיוון ש- $y_1 < y_2$ אז קיים $y_1 < y_1^R \leq y_2$ או $y_1 \leq y_2^L < y_2$.
(1). $y_1 < y_1^R \leq y_2$. במקרה זה $P_<(x_1, x_2; y_1, y_2)$ נובע מ- $P_<(x_1, x_2; y_1, y_1^R)$ ומ- $P_\leq(x_1, x_2; y_1^R, y_2)$. $P_<(x_1, x_2; y_1, y_1^R)$ כבר הוכח ב-3.6ב', ו- $P_\leq(x_1, x_2; y_1^R, y_2)$ נובע מהנחת האינדוקציה.
(2). $y_1 \leq y_2^L < y_2$. במקרה זה $P_<(x_1, x_2; y_1, y_2)$ נובע מ- $P_\leq(x_1, x_2; y_1, y_2^L)$ ומ- $P_<(x_1, x_2; y_2^L, y_2)$. $P_\leq(x_1, x_2; y_1, y_2^L)$ נובע מהנחת האינדוקציה ו- $P_<(x_1, x_2; y_2^L, y_2)$ כבר הוכח ב-3.6ב'.
ג. נובע מ-ב' בעזרת א', כמו בהוכחת 3.6.

3.9 משפט. אם x ו- y חיוביים אז גם xy חיובי. הוכחה: זה נובע מ- $P(0, x; 0, y)$, הקיים לפי 3.8ב'.

בשלב זה קבלנו שמחלקות השקילות של המספרים מהווים תחום שלמות סדור. מכאן ואילך כמעט ואין לנו צורך באבחנה בין המספר עצמו לבין מחלקת השקילות שלו, וכאשר נדבר על מספר לפעמים נתכוון למספר ולפעמים למחלקת השקילות שלו. כך כאשר נאמר $x = y$ ייתכן שאנו מתכוונים לכך ש-x ו-y הם אותו מספר ממש, או שמחלקות השקילות שלהם שוות וקיים רק $x \equiv y$. תמיד יהיה ברור מן ההקשר למה אנו מתכוונים. זהו בדיוק מצב העניינים לו אנו רגילים כאשר אנו מדברים על שברים. כשאנו אומרים ש-$\frac{1}{2}$ שווה ל-$\frac{2}{4}$ אנו מדברים על מחלקות השקילות של שברים אלו, וכאנו אומרים ש-$\frac{1}{2}$ הוא שבר מצומצם אנו מתכוונים לשבר ממש.

3.9.1 תרגיל. הוכח כי $\{0,1,2,\dots \mid \dots,\frac{\omega}{3},\frac{\omega}{2},\omega\}$.

כעת ניגש לטיפול בחילוק כדי להוכיח שהמספרים מהווים שדה סדור.

3.10 למה. כל y חיובי שקול למספר x בו 0 הוא אחד ה-x^L וכל x^L אחר הוא חיובי.

הוכחה. יהי x המשחק שהאופציות הימניות שלו הן ה-y^R-ים והשמאליות הן 0 וה-y^L-ים החיוביים. ברור ש-x הוא מספר, ולפי 2.34ב' הוא שווה ל-y.

3.11 משפט. המספרים מהווים שדה סדור.

הוכחה. כמובן שדי להוכיח שלכל מספר x חיובי יש הופכי, ואנו יכולים להניח ש-x הוא כנזכר ב-3.10. אנו עושים זאת באינדוקציה על x ולכן הנחת האינדוקציה היא שלכל אופציה של x, פרט ל-0, יש מספר הופכי.

נגדיר ברקורסיה על n שתי סדרות $Y_{L,n}$ ו-$Y_{R,n}$ של קבוצות של מספרים כדלקמן. $Y_{L,n}=\{0\}$, $Y_{R,n}=\emptyset$,

$$Y_{L,n+1}=\left\{0,\frac{1+(x^R-x)y_n^L}{x^R},\frac{1+(x^L-x)y_n^R}{x^L}\right\}$$

$$Y_{R,n+1}=\left\{\frac{1+(x^L-x)y_n^L}{x^L},\frac{1+(x^R-x)y_n^R}{x^R}\right\}$$

היכן ש-y_n^L עובר על איברי $Y_{L,n}$ ו-y_n^R עובר על איברי $Y_{R,n}$.

נגדיר עתה $y=\bigcup_{n\in\omega}Y_{L,n}\mid\bigcup_{n\in\omega}Y_{R,n}$. בהמשך נוכיח כי y הוא ההופכי של x.

3.12 למה. לכל n $Y_{L,n}\subseteq Y_{L,n+1}$ ו- $Y_{R,n}\subseteq Y_{R,n+1}$, ולכן $Y_{L,n}$ ו-$Y_{R,n}$ הן סדרות עולות. והוכחה באינדוקציה על n.

3.13 משפט א. לכל y^L,y^R קיים $xy^L<1<xy^R$.

ב. y הוא מספר.

ג. לכל $(xy)^L$ ו- $(xy)^R$ קיים $(xy)^L<1<(xy)^R$.

ד. $xy=1$.

הוכחה. א. נוכיח את א' ל-y_n^L ול-y_n^R, באינדוקציה על n. ל- $n=0$ הדבר טריביאלי, נטפל עתה ב- $n+1$. כל איבר של $Y_{L,n+1}\cup Y_{R,n+1}$, פרט ל-0, הוא בעל הצורה $y''=\frac{1+(x'-x)y'}{x'}$, היכן ש- $y'\in Y_{L,n}\cup Y_{R,n}$ ו-x' הוא אופציה שונה מ-0 של x. מכאן מתקבל $xy''=\frac{x+(x'-x)xy'}{x'}$, ולכן $1-xy''=\frac{x'-x-(x'-x)xy'}{x'}=\frac{(x'-x)(1-xy')}{x'}$. מכאן יתקבל שאם y' מקיים את א' אז גם y'' מקיים את א'. למשל אם y'' הוא האיבר של $Y_{L,n+1}$ המתקבל כאשר $x'=x^R$ ו- $y'\in Y_{L,n}$ אז, לפי הנחת האינדוקציה, $xy'<1$ ולכן $1-xy'$ חיובי וגם $x'-x=x^R-x$ חיובי ולכן $1-xy''$ חיובי.

ב. מהנחת האינדוקציה על x נובע שכל האופציות של y הן מספרים, ולפי א' קיים תמיד $y^L<y^R$.

ג. הצורה הכללית של אופציה של xy היא $x'y+xy'-x'y'$, ואפשר לכתוב אותה כ- $1+x'(y-y'')$, היכן ש- y'' היא אופציה של y כפי שראינו בהוכחת א'. עבור אופציה שמאלית של xy $x'=x^L$ ו- $y'=y^L$ או $x'=x^R$ ו- $y'=y^R$. שני המקרים הללו קובעים אופציה ימנית y'' של y ואז $y-y''$ שלילי ואם $x'\neq 0$ אז האופציה השמאלית $1+x'(y-y'')$ של xy היא קטנה מ-1, כנדרש. אם $x'=0$ אז x' הוא x^L ו-y' הוא y^L ו- $x'y+xy'-x'y'$ הוא xy^L שהוא קטן מ-1 לפי א'.

הטיפול באופציות הימניות של xy הוא דומה.

ד. לפי ג' 1 נמצא בין האופציות של xy, בעוד ש-0, שהיא האופציה היחידה של 1, אינה נמצאת בין האופציות של xy כי הוא עצמו אופציה שמאלית של xy. לכן, לפי משפט הביניים, $xy=1$.

3.14 שיכון הרציונליים בשדה סדור. יהי S שדה סדור. אז קיים שיכון יחיד של השדה הסדור Q של המספרים הרציונליים בשדה S.

3.15 שיכון הרציונליים במספרי קונווי. לפי 3.14 קיים שיכון יחיד של הרציונליים במספרי קונווי. הגבלת השיכון הזה לשלמים היא השיכון היחיד של החבורה החיבורית של השלמים במספרי קונווי, הקיים לפי 2.40. השיכון של השלמים במספרי קונווי סומן ב-2.45 ב-* כי הוא מתלכד על הטבעיים עם ההעתקה * שהוגדרה ב-2.39. לכן אנו יכולים לסמן גם את השיכון של הרציונליים במספרי קונווי ב-*, אבל בדרך כלל נזהה את המספרים הרציונליים עם תמונותיהם ולכן לא נזדקק לשימוש ב-*.