פרק ב׳: משחקים ומספרים

2.1 משחקים. המילה משחק היא דו-משמעית ולכן נתחיל בהכנסת מינוח עיקבי למושג זה. שימוש אחד במילה משחק הוא, למשל, כאשר אנו מדברים על משחק השחמט, ואז הכוונה היא למשחק שיש לו כלי משחק וחוקי משחק. השימוש השני הוא כאשר אומרים שישדרו בטלוויזיה את המשחק האחרון על אליפות העולם בשחמט. את המונח משחק נייעד למשמעות הראשונה, כלומר לכללים על פיהם משחקים השחקנים ועל פיהם נקבע מיהו המנצח. למשמעות השניה נייחד את המונח **תחרות**, כלומר תחרות היא סידרת צעדים של שני שחקנים שבסופה נקבע, על פי כללי המשחק, מיהו המנצח.

2.2 הגדרת המשחק. המשחקים בהם נעסוק הם משחקים של שני שחקנים המשחקים לסרוגין, כלומר שכל אחד מהם עושה מהלך אחד בתורו. כאשר התחרות מסתיימת היא מסתיימת בניצחון של אחד משני השחקנים, שלא כמו בשחמט, למשל, בו אפשרי גם תיקו. נראה עתה מה צריכים להיות הרכיבים בהגדרה של משחק. המשחק מורכב מעצמים שנקרא להם מצבים. תחרות היא סידרה $x_1, x_2, \dots$ של מצבים. ברגע מסויים אנו אומרים שהתחרות היא במצב מסויים x_i והשחקן שתורו לשחק בשלב זה בוחר את המצב הבא. כאשר התחרות היא במצב x אז נקרא לשחקן שתורו לשחק בשלב זה **השחקן הראשון**, ולירבו **השחקן השני**. מהלך במשחק הוא מעבר ממצב x למצב y לפי בחירת השחקן שהוא הראשון במצב x. מכיוון שהשחקנים משחקים לסרוגין השחקן שהיה השחקן הראשון במצב x הוא השחקן השני במצב y.

כללי המשחק אומרים מהם המהלכים האפשריים במצב x. את הכללים הללו אפשר לייצג ע״י גרף מכוון $G = \langle G, \to \rangle$ כך שלכל מצב x y $x \to y$ אםם במצב x השחקן הראשון יכול להעביר את המצב ל-y (ע״י מהלך בודד). כמו כן עלינו לדעת מהו המצב ההתחלתי במשחק, שנסמנו ב-g^*. כאשר אנו קובעים גם את המצב ההתחלתי במשחק אז מצב זה נקבע להיות שורש הגרף והמשחק נתון כגרף עם שורש.

אנו זקוקים כעת לכלל האומר שבמצבים מסויימים התחרות מסתיימת בנצחונו של השחקן הראשון, או בנצחון ירבו. הדרך הפשוטה להגיע לכך היא לציין שהשחקן הראשון הפסיד במצב x ע״י הקביעה שממצב זה אין לשחקן שום מהלך חוקי, כלומר שהצומת x הוא בור. איך נקבע שבמצב x הפסיד השחקן השני? את זאת אנו יכולים לעשות ע״י קביעת $x \to y$, היכן ש-y הוא בור כלשהו ואם אין בור בגרף אז מוסיפים לו מצב כזה. במקרה זה השחקן הראשון מוכרח לבחור את y ואז לשחקן (שהיה) השני אין מהלך חוקי והוא מפסיד.

נשים לב שעבור משחק G כזה כל מצב x במשחק קובע משחק שהוא המשחק המתחיל ב-x, כלומר אותו הגרף G, רק עם השורש x. את המשחק הזה נסמן ב-G_x.

נראה, כדוגמה, את המשחק הפשוט **נים**. במשחק זה בכל מצב ישנן שתי ערימות של דיסקיות על השולחן. כל שחקן, בתורו, לוקח מספר דיסקיות, ולפחות דיסקית אחת, מאחת הערמות. מצב של נים מתואר ע״י זוג מספרים $\{k,l\}$ שהם מספרי הדיסקיות בשתי הערמות ברגע מסויים של התחרות. מנצח בתחרות השחקן שלקח את הדיסקית האחרונה. הגרף G של נים נתון ע״י:

$$\{k,l\} \to \{m,n\} \text{ אםם } \{m,n\} = \{i,l\} \text{ עבור } i < k \text{ כלשהו או } \{m,n\} = \{k,j\} \text{ עבור } j < l \text{ כלשהו}$$

השחקן שלקח את הדיסקית האחרונה מעביר למצב $\{0,0\}$ והוא מנצח כי לפי הגדרת $\to$ מצב זה הוא בור.

תחרות במשחק G היא, אם כן, סידרה סופית או אינסופית של מצבים שהיא מסילה בגרף המתחילה ב-g^*, ואם התחרות היא סופית והמצב האחרון בה הוא x_m אז מצב זה חייב להיות מצב בו אין מהלך חוקי, כלומר בור. למסילה $x_1, x_2, \dots$ הממלא אחר הדרישות של התחרות פרט לדרישה המתייחסת לאיבר אחרון נקרא בשם **תחרות חלקית**. ברור כי תחרות חלקית היא תחרות שאולי עדיין לא הסתיימה.

נזכיר עתה עוד דוגמה של משחק, שנעסוק בה רבות בהמשך, וזהו משחק הקבוצה. במשחק זה כל מצב הוא קבוצה x והמהלך שהשחקן הראשון מבצע הוא שהוא בוחר איבר של x. אם $x = \emptyset$ אז השחקן הראשון מפסיד כי אין לו מהלך חוקי. אם $\emptyset \in x$ אז השחקן הראשון יכול לנצח ע״י בחירת האיבר $\emptyset$.

2.3 כעת נדון בשאלה האם במשחק כללי יכול אחד השחקנים לוודא שהוא ינצח בתחרות. לשם כך יש צורך במושג האסטרטגיה, כאשר אסטרטגיה היא פונקציה האומרת לשחקן איזה מהלך עליו לבצע בכל מצב של המשחק. לכן נגדיר **אסטרטגיה** σ של שחקן P במשחק G כפונקציה שתחומה הוא קבוצת המצבים x של המשחק בהם תור P

לשחק ושבהם יש מהלך חוקי וכך שלכל מצב x כזה $\sigma(x)$ הוא מהלך חוקי במצב זה, כלומר $x \to \sigma(x)$. נתבונן בתחרות $x_0, x_1, \ldots$. אם השחקן P הוא השחקן המתחיל אז הוא בוחר את x_1 וכן את כל המצבים x_n עם n איזוגי גדול מ-1. אם היריב של P הוא השחקן המתחיל אז P בוחר את x_2 וכן את כל המצבים x_n עם n זוגי גדול מ-2. יהי p האינדקס של המהלך הראשון של P, כלומר 1 או 2, כך ש-x_p הוא הצעד הראשון של P, ואז הצעדים של P בתחרות הם $x_p, x_{p+2}, x_{p+4}, \ldots$. אנו אומרים שבתחרות (כולל תחרות חלקית) $x_0, x_1, \ldots$ השחקן P שיחק לפי האסטרטגיה σ אם לכל $m \geq 0$ כך ש-x_{p+2m} נמצא בתחרות קיים $x_{p+2m} = \sigma(x_{p+2m-1})$. כמובן שבתחרות אם P רוצה הוא יכול לשחק לפי האסטרטגיה σ ויריבו אינו יכול למנוע זאת. האסטרטגיה σ של P נקראת **אסטרטגית ניצחון** ל-P אם בכל תחרות בה P משחק לפי σ הוא מנצח.

כמובן שבמשחק נתון לא יכולות להיות לשני השחקנים אסטרטגיות ניצחון. אילו היתה לשחקן P אסטרטגית ניצחון σ ולירִיבו אסטרטגית ניצחון τ אפשר להגדיר תחרות בה כל אחד מהשחקנים משחק לפי האסטרטגיה שלו, ובתחרות זאת מנצח אחד השחקנים, וזה בניגוד להנחתנו ש-σ ו-τ הן אסטרטגיות ניצחון. האם בכל משחק ישנה בהכרח אסטרטגית ניצחון לאחד השחקנים? במשחקים בהם תתכנה תחרויות אינסופיות זה לא חייב להיות כך. למשחקים כאלו אפילו לא אמרנו כיצד נקבע מי מנצח בתחרות. העיסוק במשחקים כאלו הוא נושא חשוב ומרתק אבל הוא אינו שייך לענין בו אנו עוסקים כאן ולכן לא ניגע בו.

משחק בו כל תחרות היא סופית נקרא **משחק מבוסס היטב**, וזה אומר בדיוק שהגרף של המשחק הוא מבוסס היטב. למשל, כל משחק סופי, כלומר בעל מספר סופי של מצבים, אשר בו כל מצב לא יכול להופיע בתחרות יותר מפעם אחת הוא מבוסס היטב. דוגמה למשחק כזה הוא משחק הנים שעליו כבר דיברנו עם מצב התחלתי $\{m, n\}$ כלשהו.

ישנם גם משחקים מבוססים היטב שאינם סופיים, למשל משחק הנים בו המצב ההתחלתי אינו אחד המצבים $\{k, l\}$ אלא מצב חדש שנסמנו ב-O ושממנו ניתן לעבור לכל זוג $\{k, l\}$.

נאמר שהשחקן P **מנצח במשחק** G אם יש לו אסטרטגית ניצחון ב-G. למשחק בו אחד השחקנים מנצח נקרא **משחק מוכרע**. מטרתנו היא להוכיח שכל משחק מבוסס היטב הוא מוכרע. לשם כך נדון עתה באופן לא פורמלי בשאלה אם מובטח לאחד משני השחקנים לנצח אם הוא ישחק נכון, מבלי להתייחס למושג האסטרטגיה. נשאל זאת לא רק עבור המשחק כולו, אלא נניח שהשחקנים הגיעו בתחרות למצב x מסויים האם כעת מובטח לאחד משני השחקנים לנצח, אם הוא ישחק נכון. אם במצב x מובטח לשחקן P לנצח, אם הוא ישחק נכון, נאמר שהמצב x הוא עמדת ניצחון ל-P. נבחין עתה בשני כללים הנוגעים לעמדות ניצחון לשחקנים. אם x הוא עמדת ניצחון לשחקן הראשון P ובחירת הבן y של x היא מהלך נכון של P, אז גם y הוא עמדת ניצחון ל-P, שהוא עתה השחקן השני, כי אם P שיחק נכון הוא לא עבר ממצב בו ניצחונו היה מובטח למצב בו ניצחונו אינו מובטח. כך קיבלנו את

כלל א'. אם x הוא עמדת ניצחון לשחקן הראשון P אז יש לו בן y שהוא עמדת ניצחון לשחקן השני.

כעת נניח כי x הוא עמדת ניצחון לשחקן השני ו-y הוא בן כלשהו של x. אם y אינו עמדת ניצחון לשחקן הראשון, שהוא יריבו של P, אז במצב x יכול השחקן הראשון P לבחור את המצב y אשר בו ניצחונו של היריב, שהוא עתה השחקן הראשון, אינו מובטח, וזה עומד בניגוד להנחתנו שבמצב x ניצחונו של השחקן השני מובטח. כך קיבלנו את

כלל ב'. אם x הוא עמדת ניצחון לשחקן השני אז כל בן y של x הוא עמדת ניצחון לשחקן הראשון.

אם x הוא כזה כך שכל בן שלו y הוא עמדת נצחון לאחד משני השחקנים אז תמיד קיימת אחת התוצאות של כללים א' ו-ב' ולכן אפשר להחליף את ה"אם" בכללים אלו ב-"אםם". לכן אנו יכולים להשתמש בכללים א' ו-ב' כדי לתת הגדרה פורמלית למושג של עמדת ניצחון, עבור משחקים מבוססים היטב, כך שכל מצב הוא עמדת ניצחון לאחד משני השחקנים.

אנו מגדירים פונקציה W על המצבים של המשחק כך שלכל מצב x $W(x)$ הוא 1 או 2 בהתאם לכך ש-x הוא עמדת ניצחון לשחקן הראשון או השני. בשלב זה אנו מגדירים לכל מצב את השחקן שהמצב נקרא עמדת ניצחון עבורו, אבל עדיין איננו מוכיחים שאם המצב הוא עמדת ניצחון עבורו אז הוא באמת יכול לנצח כאשר התחרות יוצאת ממצב זה. ההגדרה של W ברקורסיה היא לפי הכללים א' ו-ב' כדלקמן. לפי כלל א', $W(x) = 1$ אם קיים בן y של x כך ש- $W(y) = 2$, ולפי כלל ב', $W(x) = 2$ במקרה המשלים בו לכל בן y של x קיים $W(y) = 1$. נשים לב שאם x הוא בור אז קיים, באופן ריק, המצב של כלל ב' ו- $W(x) = 2$.

2.4 משפט צרמלו. בכל משחק מבוסס היטב יש אסטרטגית ניצחון לאחד השחקנים.

הוכחה. הגדרנו לעיל את הפונקציה W על המצבים של משחק מבוסס היטב כך שכל מצב x במשחק הוא עמדת ניצחון לאחד השחקנים (אבל לא טענו שלשחקן בעמדת ניצחון ישנה אסטרטגית ניצחון), ולכן, במיוחד, המצב ההתחלתי g^* הוא עמדת ניצחון של אחד השחקנים P. נוכיח כי יש ל-P אסטרטגית ניצחון במשחק. האסטרטגיה σ של P היא שבכל מצב x בו תורו של P לשחק הוא בוחר בן y של x שהוא עמדת ניצחון ל-P, אם יש כזה, ואם אין כזה אז בן כלשהו של x. נראה שזאת אסטרטגית ניצחון ל-P. תהי $g^*{=}x_1,...,x_k$ תחרות בה P שיחק לפי σ. נוכיח עתה באינדוקציה על i כי x_i הוא עמדת ניצחון ל-P. נתון לנו ש- $x_1{=}g^*$ הוא עמדת ניצחון ל-P. עבור $i < k$ נניח כי x_i הוא עמדת ניצחון ל-P ונוכיח כי גם x_{i+1} הוא עמדת ניצחון ל-P.

אם תורו של P לשחק במצב x_i אז, מכיוון ש-x_i עמדת ניצחון ל-P, $W(x_i) = 1$. לפי הגדרת W יש ל-x_i בן y כך ש- $W(y) = 2$, כלומר ש-y היא עמדת ניצחון ל-P, שהוא השחקן השני במצב y. לכן לפי הגדרת σ $s(x_i)$ הוא בן של x_i שהוא עמדת ניצחון ל-P. מכיוון שהתחרות $g^*{=}x_1,...,x_k$ שוחקה לפי σ לכן $x_{i+1} = \sigma(x_i)$, ו-x_{i+1} הוא עמדת ניצחון ל-P.

אם תור יריבו של P לשחק במצב x_i אז $W(x_i) = 2$. לפי הגדרת W קיים $W(y) = 1$ לכל בן y של x, ובמיוחד $W(x_{i+1}) = 1$, כלומר x_{i+1} הוא עמדת ניצחון לשחקן הראשון בו שהוא P.

נתבונן בצעד האחרון בתחרות x_k שהוא כמובן בור, וכפי שהזכרנו הוא חייב להיות עמדת נצחון לשחקן השני. מכיוון שהוכחנו כי לכל $1 \leq i \leq k$ x_i הוא עמדת ניצחון ל-P לכן במצב x_k P הוא השחקן השני ו-Q הוא השחקן הראשון והוא מפסיד כי x_k בור, ולכן P מנצח בתחרות.

מהוכחת המשפט ברור שמה שהוכח במשפט ל-g^* נכון לכל מצב x במשחק, כלומר שחקן P מנצח במשחק G_x אסם x היא עמדת ניצחון לשחקן P.

2.5 ייצוג משחק ע"י משחק קבוצה. ראינו לעיל את מושג משחק הקבוצה בו $x \to y$ אסם $y \in x$, ואנו רוצים לייצג כל משחק מבוסס היטב ע"י משחק קבוצה. בור במשחק יהיה מיוצג ע"י הקבוצה הריקה $\emptyset$ שהיא הבור היחיד במשחק הקבוצה. מכיוון שבמשחק מבוסס היטב יכולים להיות בורות רבים ובמשחק קבוצה יש רק בור אחד לא כל משחק מבוסס היטב יכול להיות איזומורפי למשחק קבוצה. מה שאפשר לעשות בהינתן משחק G הוא להגדיר פונקציה F מקבוצת המצבים של G על הקבוצה $F(G) = \{F(g^*)\} \cup \mathrm{Tc}(F(g^*))$, היכן ש-$Tc(z)$ הוא הסגור הטרנזיטיבי של z, בעלת התכונות הבאות:

א. לכל שני מצבים x, y, אם $x \to y$ אז $F(y) \in F(x)$.

ב. אם x מצב ו- $u \in F(x)$ אז קיים בן y של x כך ש- $F(y) = u$.

א' ו-ב' שקולים לשוויון $F(x) = \{F(y) \mid x \to y\}$. שיוויון זה הוא הגדרה של F ברקורסיה על קבוצת המצבים, ונגדיר את F כך. זה אומר גם שקיימת F יחידה כזאת. נקרא ל-F זאת **ההעתקה התיקנית** של G על משחק קבוצה.

נראה דוגמה להעתקה התיקנית של משחק הנים. ברור מהגדרת F כי $F(x) = \emptyset$ אסם x הוא בור, ולכן במשחק הנים $F(\{0,0\}) = \emptyset$. במשחק זה $F(\{1,0\}) = \{\emptyset\}$, $F(\{1,1\}) = \{\{\emptyset\}\}$, $F(\{2,0\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ו- $F(\{2,1\}) = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

מכיוון שקבוצה של קבוצות מבוססות היטב היא בעצמה מבוססת היטב נובע באינדוקציה על x כי $F(x)$ היא קבוצה מבוססת היטב וגם $F(G)$ מבוססת היטב.

משפט. תהי F ההעתקה התיקנית של משחק מבוסס היטב G על משחק קבוצה $F(G)$. אז לכל מצב x ב-G, x הוא עמדת ניצחון לשחקן הראשון (השני) ב-G אסם $F(x)$ עמדת ניצחון לשחקן הראשון (השני) ב-$F(G)$.

הוכחה. אפשר להוכיח זאת בשתי דרכים. הדרך האחת היא להוכיח את $W(F(x)) = W(x)$ באינדוקציה על x ונוח להשתמש לשם כך בנוסחה $W(x) = 3 - \max_{x \to y} W(y)$. הדרך השניה היא להניח שלשחקן P יש אסטרטגית ניצחון σ במשחק $F(x)$, להגדיר אסטרטגיה σ' במשחק G_x ע"י הקביעה ש- $\sigma'(y) = z$ עבור בן z של y כך ש- $F(z) = \sigma(y)$ (יש לוודא שקיים z כזה), ולהוכיח ש-σ' אסטרטגית ניצחון ל-P במשחק G_x.

2.6 משחקים לא סימטריים. המשחקים בהם עסקנו הם משחקים סימטריים במובן שכל ההבדל בין שני השחקנים הוא במי שמתחיל לשחק. נניח שהשחקנים הם P ו-Q, ואנו מתבוננים בשתי האפשרויות ש-P הוא השחקן הראשון וש-Q הוא השחקן הראשון אז אין כל הבדל בתחרויות ובנצחונות, רק שעלינו להחליף את P ו-Q זה בזה בכל מקום. יש ענין במושג יותר עשיר של משחק והוא שלרשות כל אחד מן השחקנים עומדים מהלכים שונים, ולמשחק כזה נקרא

משחק לא סימטרי כלומר שהוא לא בהכרח סימטרי). מושג זה הוא טבעי ביותר. למשל במשחק השחמט שחקן אחד רשאי להזיז רק את הכלים הלבנים, והשני רק את הכלים השחורים. את מושג המספר נפתח בהמשך בהסתמך על אי הסימטריה בין שני השחקנים. אנו נשתמש במונח "משחק" גם למשחק סימטרי וגם למשחק לא סימטרי, והיכן שלא יהיה ברור מן ההקשר למה אנו מתכוונים נציין את כוונתנו במפורש.

משחק לא סימטרי הוא מבנה $\langle G, g^*, \to_L, \to_R\rangle$, בו G קבוצה, ו- $\to_L, \to_R$ שני יחסים על G, כך שאם נסמן $\to = \to_L \cup \to_R$ אז $\langle G, g^*, \to\rangle$ הוא גרף מיוחד. כאשר נשתמש לגבי משחק במונחים שהגדרנו לגרפים נתכוון לגרף זה.

נשתמש גם במינוח הבא, המיוחד למשחקים. במשחק משתתפים שני שחקנים: השחקן השמאלי L (left) והשחקן הימני R (right). השחקנים מבצעים מהלכים לסרוגין. בכל שלב של המשחק נמצא המשחק בצומת x מסויים של G. בתורו מעביר השחקן L את המשחק מ-x ל-y המקיים $x \to_L y$, ובתורו מעביר השחקן R את המשחק מ-x ל-y המקיים $x \to_R y$. לשחקן P מצב y המקיים $x \to_P y$ נקרא **אופציה** של x ל-P. במיוחד, מצב y המקיים $x \to_L y$ נקרא **אופציה שמאלית** של x ומצב y המקיים $x \to_R y$ נקרא **אופציה ימנית** של x. בתחילת המשחק נמצא המשחק בשורש g^*.

משחק עם מתחיל הוא זוג $\langle G, A\rangle$, היכן ש-G הוא משחק ו-A הוא אחד השחקנים L או R הנקבע כשחקן המתחיל. את השחקן המתחיל נסמן בדרך כלל ב-A (attacker – מתקיף) ואת השחקן השני ב-D (defender – מגן).

כאשר נתייחס לשחקן כלשהו ונסמנו ב-P אז Q יסמן תמיד את השחקן השני.

עמדה במשחק G היא זוג $\langle y, P\rangle$ כאשר $y \in G$ ו- $P \in \{L, R\}$. המשמעות של עמדה $\langle y, P\rangle$ היא שהמשחק נמצא בצומת y וכעת תורו של השחקן P לעשות מהלך.

תחרות במשחק עם מתחיל $\langle G, A\rangle$ זאת סידרה, סופית או אינסופית של עמדות, כך שהעמדה ההתחלתית היא $\langle g^*, A\rangle$, היכן ש-g^* הוא השורש ו-A הוא השחקן המתחיל, ולכל עמדה $\langle x, P\rangle$ בתחרות, אם איננה העמדה האחרונה בסידרה אז העמדה העוקבת לה היא $\langle y, Q\rangle$ היכן ש- $x \to_P y$ (Q הוא השחקן השני כי אחרי ש-P שיחק הגיע תורו של Q לשחק). אם $\langle x, P\rangle$ היא העמדה האחרונה בסידרה אז אין ל-P אפשרות לבצע מהלך מעמדה זאת, כלומר לא קיימת אף אופציה של x ל-P. בניסוח יותר סימבולי, תחרות זאת סידרה $\langle\langle x_i, P_i\rangle \mid 0 \le i < \lambda\rangle$ של עמדות בה $\lambda \le \omega$, $\langle x_0, P_0\rangle = \langle g^*, A\rangle$, לכל i כך ש- $i + 1 < \lambda$ קיים $x_i \to_{P_i} x_{i+1}$ ו- $P_{i+1} \neq P_i$, ואם λ סופי ו-$m = \lambda - 1$ אז לא קיים y כך ש- $x_m \to_{P_m} y$. במקרה של תחרות סופית, השחקן $P_{\lambda-1}$ שאינו יכול להמשיך נקרא **השחקן שהפסיד בתחרות**, והשחקן השני נקרא **השחקן המנצח בתחרות**.

לדוגמאות של משחקים כאלו, ולחישוב היתרון שיש במשחק כזה לאחד השחקנים ראה עמודים 4-9 בספר של Berlekamp, Conway & Guy.

במשחקים הסימטריים הדרישה שכל תחרות תהיה סופית שקולה לכך שהגרף מבוסס היטב. למשחק לא סימטרי נאמר שהמשחק מבוסס היטב אם הגרף עם השורש $\langle G, \to, g^*\rangle$ מבוסס היטב, היכן ש- $\to = \to_L \cup \to_R$. כמובן שאם הגרף מבוסס היטב כל תחרות היא סופית, אולם למשחקים לא סימטריים שני תנאים אלו אינם שקולים, ודרישת הביסוס היטב חזקה יותר מכך שכל תחרות היא סופית. למשל, במשחק שהמצבים שלו הם a_i ל- $i \in \omega$ ו- $a_i \to_L a_{i+1}$ לכל $i \in \omega$ ואילו היחס $\to_R$ הוא ריק כל תחרות היא בת שתי עמדות לכל היותר, כי לשחקן הימני אין שום מהלך, ומאידך הגרף $\langle G, \to, g^*\rangle$ אינו מבוסס היטב.

מדוע אנו דורשים את הדרישה החזקה יותר שהגרף יהיה מבוסס היטב ואיננו מסתפקים בכך שכל תחרות היא סופית? ביסוד העיסוק במשחקים לא סימטריים היה הרעיון שלעיתים נעסוק בתחרויות שאינן תחרויות לפי ההגדרה שניתנה כאן אשר לפיה השחקן המבצע את המהלך מתחלף בכל שלב, אלא גם בתחרויות שבהן שחקן אחד מבצע מספר מהלכים בזה אחר זה. כדי להיות בטוחים שגם "תחרויות" כאלו הן סופיות עלינו לדרוש שהמשחק יהיה מבוסס היטב. יתרון "טכני" של הדרישה שלנו הוא שאם הגרף מבוסס היטב אפשר להוכיח משפטים באינדוקציה על הצמתים ואפשר להגדיר עליהם פונקציות ברקורסיה.

מכאן ואילך נעסוק רק במשחקים מבוססים היטב.

2.7 אסטרטגיות ניצחון במשחקים לא סימטריים. במשחק סימטרי יכולה להיות אסטרטגית ניצחון לשחקן הראשון או השני. במשחק לא סימטרי אם, נאמר, יש אסטרטגית ניצחון לשחקן הראשון כאשר L מתחיל זה לא אומר שיש

אסטרטגית ניצחון לשחקן הראשון כאשר R מתחיל, מחמת חוסר הסימטריה במשחק. לכן נדבר על אסטרטגיות ניצחון במשחק לא סימטרי עם מתחיל. אסטרטגיה לשחקן P במשחק לא סימטרי היא, אם כן, פונקציה σ שתחומה הוא קבוצת המצבים x של המשחק שיש להם אופציות ל-P וכך שלכל x בתחומה $\sigma(x)$ היא אופציה של x ל-P. P משחק בתחרות $\langle x_1, P_1\rangle, \ldots, \langle x_k, P_k\rangle$ לפי σ אם לכל $1 \leq i < k$ אם בתחרות בה $P_i = P$ אז $x_{i+1} = \sigma(x_i)$.

2.8 משפט צרמלו למשחקים לא סימטריים. בכל משחק לא סימטרי מבוסס היטב עם מתחיל יש לאחד השחקנים אסטרטגית ניצחון.

הוכחה. ההוכחה דומה לגמרי להוכחת משפט צרמלו למשחקים סימטריים. בשלב ראשון אנו מגדירים ברקורסיה שעמדה $\langle x, P\rangle$ היא עמדת ניצחון לשחקן W אם $W = P$ וקיימת אופציה y של x ל-P כך ש- $\langle y, Q\rangle$ היא עמדת ניצחון ל-P, או אם $W = Q$ ולכל אופציה y של x ל-P $\langle y, Q\rangle$ היא עמדת ניצחון ל-Q. בשלב זה עדיין איננו טוענים שלשחקן הנמצא בעמדת ניצחון בתחילת המשחק יש אסטרטגית ניצחון. לפי משפט ההגדרה ברקורסיה מוגדר לכל עמדה ולכל שחקן אם העמדה היא עמדת ניצחון לשחקן, ובקלות מוכיחים באינדוקציה שכל עמדה היא עמדת ניצחון לאחד השחקנים בדיוק. בהינתן עמדת ניצחון $\langle x, P\rangle$ לשחקן W אז יש לשחקן W אסטרגית ניצחון במשחק G_x, שהוא כמו G רק שהשורש שלו הוא x, עם P כשחקן מתחיל. האסטרטגיה של W היא לעבור, כל עוד זה אפשרי, לעמדה שהיא עמדת ניצחון ל-W.

2.9 משחקי קונווי (Conway). המשחקים הסימטריים "התיקניים" הם משחקי הקבוצה, בהם המהלכים האפשריים ממצב x הם האיברים של x. במשחק לא סימטרי יש בכל מצב שני סוגי מהלכים אפשריים, המהלכים האפשריים לשחקן השמאלי L והמהלכים האפשריים לשחקן הימני R. לכן עלינו לייצג מצב לא ע"י קבוצת מצבים אלא ע"י זוג של קבוצות מצבים, כאשר הקבוצה השמאלית היא קבוצת המצבים אליהם יכול L לעבור והקבוצה הימנית היא קבוצת המצבים אליהם יכול R לעבור.

לכן נגדיר בהגדרה סתומה: משחק קונווי הוא זוג $\langle U, V\rangle$ של קבוצות U ו-V של משחקי קונווי, כאשר איברי U נקראים האופציות השמאליות של $\langle U, V\rangle$ ואיברי V נקראים האופציות הימניות של $\langle U, V\rangle$. נכתוב זוג זה גם כ- $U \mid V$.

הגדרה ברקורסיה: בדומה להגדרת הפונקציה V_α המתארת את תהליך בריאת הקבוצות נגדיר כן פונקציה C_α המתארת את תהליך בריאת משחקי קונווי, כאשר C_α היא קבוצת משחקי קונווי שנבראו לפני יום α. אנו מגדירים, אם כן, $C_0 = \emptyset$, $C_{\alpha+1} = \{\langle U, V\rangle \ : \ U, V \subseteq C_\alpha\}$ ועבור סודר α גבולי $C_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta$. קבוצה x היא משחק קונווי אם היא נמצאת ב-C_α כלשהו.

ברור כי C_α מכילה משחקים שאינם נמצאים באף C_β עבור $\beta < \alpha$ רק אם α הוא סודר עוקב $\gamma + 1$ ומשחקים אלו הם המשחקים שנבראו ביום γ. לכן נגדיר את **יום הבריאה** $\rho(x)$ של משחק קונווי כסודר γ המזערי כך ש- $x \in V_{\gamma+1}$. $\rho(x)$ נקרא גם **הדרגה של המשחק** x. אמנם סימנו ב-1.8 ב-$\rho(x)$ גם את הדרגה של x כקבוצה מבוססת היטב, אולם מכאן ואילך נשתמש רק בדרגה של x כמשחק ולכן המשמעות הכפולה של $\rho(x)$ לא תפריע לנו. כמו ב-1.8 קיים כאן שהדרגה של משחק x היא הסודר המזערי הגדול מכל הדרגות של האופציות של x, ואפשר להשתמש בתכונה זאת של הדרגה לצורך הגדרה שלה ברקורסיה.

ברור מן ההגדרה כי כל אופציה y של משחק קונווי x היא משחק קונווי בעל דרגה קטנה מדרגת x, ולכן כל משחק קונווי הוא מבוסס היטב.

2.10 ייצוג משחק ע"י משחק קונווי. כפי שראינו ב-2.5 שאפשר לייצג כל משחק סימטרי מבוסס היטב, במובן טוב למדי, ע"י משחק קבוצה, כך נראה עתה שאפשר לייצג כל משחק לא סימטרי מבוסס היטב, במובן טוב למדי, ע"י משחק קונווי. יהי G משחק. כמו ב-2.5, בהינתן משחק G נגדיר פונקציה F מקבוצת המצבים של G לקבוצת זוגות של קבוצות בעלת התכונות הבאות:

א. לכל שני מצבים x, y ושחקן $P \in \{L, R\}$, אם $x \to_P y$ אז $F(y) \in F(x)_P$.

ב. אם x מצב, $P \in \{L, R\}$, ו- $u \in F(x)_P$ אז קיים y כך ש- $x \to_P y$ ו- $F(y) = u$.

א' ו-ב' שקולים לשיוויון $F(x) = \langle \{F(y) \mid x \to_L y\}, \{F(y) \mid x \to_R y\}\rangle$. שיוויון זה הוא הגדרה של F ברקורסיה על קבוצה, שקל להוכיח שהיא קבוצה של משחקי קונווי. זה אומר גם שקיימת F יחידה כזאת. נקרא ל-F זאת **ההעתקה התיקנית** של G על משחק קונווי $F(G)$.

2.11 משפט. תהי F ההעתקה התיקנית של משחק מבוסס היטב G על משחק קונווי. אז לכל עמדה $\langle x, P\rangle$ ב-G,

העמדה היא עמדת ניצחון לשחקן ב-G אסם $F(x)$ עמדת ניצחון לאותו שחקן ב-$F(G)$.

2.12 סימון למשחקי קנוויי. למשחק קנוויי x נסמן $x = \langle X_L, X_R\rangle = X_L \mid X_R$. נכתוב את המשחק x גם בצורה $x = \{\ldots \mid \ldots\}$, כאשר משמאל לקו | כתובים איברי X_L ומימין לקו כתובים איברי X_R. למשל, את המשחק $\langle\{0,1\}\{2\}\rangle$ נכתוב גם כ- $\{0,1 \mid 2\}$, ואת המשחק $\langle\emptyset \mid \emptyset\rangle$ נכתוב גם כ- $\{|\}$.
למשחק $\{|\}$ נקרא **משחק האפס** ונסמנו ב-0, היכן שהדבר לא יגרום לבילבול.
את האיבר הכללי של X_L נכתוב כ- x^L ואת האיבר הכללי של X_R נכתוב כ- x^R, ולכן אנו יכולים לכתוב $x = \{x^L \mid x^R\}$.
נכתוב $y\widetilde{\in}x$ עבור $y \in X_L \cup X_R$. כך $y\widetilde{\in}x$ אסם y הוא x^L או x^R.

מכאן ואילך כאשר נדבר על משחק נתכוון למשחק קנוויי. באותם מקרים בודדים בהם נדבר על משחק שאינו משחק קנוויי יהיה הדבר ברור מתוך הענין, ואם יהיה צורך בכך נזכיר זאת במפורש.

2.13 מינוס משחק. אם G הוא המשחק $\langle G, g^*, \to_L, \to_R\rangle$ אז $-G$ הוא המשחק $\langle G, g^*, \to_R, \to_L\rangle$, כלומר המשחק שהוא כמו G רק התחלפו בו תפקידי השחקנים: לשחקן L מותרים ב-$-G$ המהלכים המותרים ב-G לשחקן R ולשחקן R מותרים ב-$-G$ המהלכים המותרים ב-G לשחקן L.

מהו $-x$ למשחק קנוויי x? L בוחר איבר שהוא כביכול בקבוצה X_R, אבל המשחק אותו הוא בוחר אינו ב-X_R כי גם בו התחלפו תפקידי השחקנים, ולכן הוא בוחר משחק $-y$ היכן ש-$y \in X_R$. באותו אופן R בוחר משחק $-y$ היכן ש- $y \in X_L$. לכן אנו יכולים לכתוב $-x = \{-x^R \mid -x^L\}$. בשיוויון זה ניתן לראות הגדרה ברקורסיה של $-x$, ואנו נראה בו את ההגדרה הרישמית לפעולת המינוס של משחקי קנוויי.

הגדרה. למשחק קנוויי x אנו מגדירים ברקורסיה $-x = \{-x^R \mid -x^L\}$.

ברור כי $0 = -0$, וכי $-\{0 \mid\} = \{\mid -0\} = \{\mid 0\}$.

2.14 משפט. $-(-x) = x$.

הוכחה. באינדוקציה על x. $-(-x) = -\{(-x)^R \mid (-x)^L\} = \{-(-x^L) \mid -(-x^R)\}$. לפי הנחת האינדוקציה $-(-x^P) = x^P$ ולכן $-(-x) = \{x^L \mid x^R\} \equiv x$.

2.15 סכום שני משחקים. למשחקים G, H המשחק $G + H$ הוא המשחק בו השחקנים משחקים בבת אחת בשני המשחקים G ו-H וכל שחקן בתורו עושה מהלך באחד משני המשחקים. ליתר דיוק, קבוצת הצמתים של $G + H$ היא המכפלה הקרטזית $G \times H = \{\langle x_1, x_2\rangle \mid x_1 \in G \wedge x_2 \in H\}$, והצעדים המותרים לשחקן P ב- $G + H$ נתונים ע"י: $\langle x_1, x_2\rangle \to_P \langle y_1, y_2\rangle$ אסם $x_1 \to_P y_1$ ו- $x_2 = y_2$ (כלומר המהלך נעשה ב-G והצומת ב-H אינו משתנה) או $x_2 \to_P y_2$ ו- $x_1 = y_1$ (כלומר המהלך נעשה ב-H והצומת ב-G אינו משתנה).

מהו $x + y$ למשחקי קנוויי x ו- y? אפשרויות השחקן L הן לעשות צעד ב-x, כלומר לבחור איבר x^L, ולהישאר עם y כך שהוא עובר למשחק $x^L + y$, או לעשות צעד ב-y כלומר לבחור איבר y^L ולהשאר עם x כך שהמשחק עובר למשחק $x + y^L$. באותו אופן השחקן R יכול לעבור ל- $x^R + y$ או ל- $x + y^R$. כך אנו יכולים לכתוב את הגדרת החיבור של משחקי קנוויי כך:

הגדרה. $x + y = \{x^L + y, x + y^L \mid x^R + y, x + y^R\}$.

זאת היא הגדרה ברקורסיה על היחס $\to$ הנתון ע"י $\langle x', y'\rangle \to \langle x, y\rangle$ אסם $x'\widetilde{\in}x$ ו- $y' = y$ או $y'\widetilde{\in}y$ ו- $x' = x$. קל לראות שגם יחס זה הוא יחס מבוסס היטב, ולכן אפשר להגדיר ברקורסיה ביחס ליחס זה. כשנרצה להוכיח באינדוקציה על יחס זה נאמר "באינדוקציה על x, y", וכשנרצה להגדיר ברקורסיה על יחס זה נאמר "ברקורסיה על x, y".

2.16 משפט. א. $x + y = y + x$. (באינדוקציה על x, y).

ב. $(x + y) + z = x + (y + z)$. (באינדוקציה על x, y, z).

ג. $x + 0 = x$. (באינדוקציה על x).

ד. $-(x + y) = (-x) + (-y)$. (באינדוקציה על x, y).

דוגמא. $\{0 \mid\} + \{0 \mid\} = \{\{0 \mid\} \mid\}$.

לצורך המינוח אנו נסתכל במה שקורה מנקודת הראות של השחקן L, וגם נקרא לו "השחקן הטוב", כי זה בוודאי נכון מנקודת הראות של L, בניגוד ל-R שנקרא לו "השחקן הרע".

2.17 משחק מאוזן הוא משחק בו השחקן המתחיל מפסיד.

משחק קדם-חיובי הוא משחק בו אם R מתחיל אז הוא מפסיד.

משחק קדם-שלילי הוא משחק בו אם L מתחיל אז הוא מפסיד.

משחק הוא מאוזן אםם הוא קדם-חיובי וקדם שלילי.

משחק הוא **חיובי** אם הוא קדם-חיובי ואינו מאוזן, כלומר אם בו L מנצח תמיד.

משחק הוא **שלילי** אם הוא קדם-שלילי ואינו מאוזן, כלומר אם בו R מנצח תמיד.

המשחקים שאינם קדם-חיוביים ואינם קדם-שליליים הם המשחקים בהם המתחיל מנצח, כמו בדו-קרב אקדחים בין שני קלעים טובים וכמו במשחק $\{0 \mid 0\}$.

2.18 למה. x קדם-חיובי (קדם-שלילי) אםם $-x$ קדם-שלילי (קדם-חיובי). (נובע, באינדוקציה, מן ההגדרה של עמדת ניצחון).

x חיובי (שלילי) אםם $-x$ שלילי (חיובי).

2.19 הגדרה. א. ב- $x - y$ נסמן את $x + (-y)$.

ב. נגדיר $x \leq y$ אם $y - x$ קדם-חיובי.

ג. $x \equiv y$ אם $x \leq y$ ו- $y \leq x$. במקרה זה נאמר שהמשחקים x ו-y **שקולים**.

ד. $x < y$ אם $x \leq y$ ו- $y \nleq x$. ה. $x \geq y$ אם $y \leq x$. ו. $x > y$ אם $y < x$.

2.20 למה. א. $x < y$ אםם $y - x$ חיובי. (העזר ב-2.16 וב- 2.14).

ב. $0 \leq x$ $(0 \geq x)$ אםם x קדם-חיובי (קדם-שלילי).

ג. $x \equiv 0$ אםם x מאוזן.

2.21 משפט. א. x קדם-חיובי אםם אף x^R אינו קדם שלילי, ו-x קדם-שלילי אםם אף x^L אינו קדם חיובי.

ב. $x \leq y$ אםם לאף y^R לא קיים $y^R \leq x$ ולאף x^L לא קיים $y \leq x^L$.

אפשר לראות בחלק ב' הגדרה של $\leq$ ברקורסיה על x, y.

הוכחה. א. לפי ההגדרה x קדם חיובי אםם כאשר R מתחיל ב-x אז הוא מפסיד, כלומר $\langle x, R\rangle$ היא עמדת ניצחון ל-L. לפי ההגדרה הרקורסיבית של עמדת ניצחון ב-2.8 זה קיים אםם לכל אופציה ימנית x^R של x $\langle x^R, L\rangle$ היא עמדת ניצחון ל-L, כלומר אם L מתחיל ב-x^R אז L מנצח. טענה זאת היא בדיוק שלילת הטענה ש-x^R קדם שלילי. החלק השני של א' מוכח באופן מקביל.

ב. לפי הגדרת $\leq$ קיים ש- $x \leq y$ אםם $y - x$ קדם חיובי, ולפי חלק א' זה קיים אםם אף אופציה ימנית של $y - x$ אינה קדם שלילית. האופציות הימניות של $y - x$ הן $y^R - x$ ו-$y - x^L$. לפי 2.16 ו-2.18 $y^R - x$ קדם-שלילי אםם $-(y^R - x) = x - y^R$ קדם חיובי, ולפי הגדרת $\leq$ זה אומר ש- $y^R \leq x$. באופן דומה $y - x^L$ קדם-שלילי אםם $y \leq x^L$. בכך הוכח החלק הראשון של ב'. החלק השני של ב' מוכח באופן דומה.

הגישה החלופית למשחקי קונווי. קיימת גם גישה חלופית למשחקי קונווי לא דרך מושגי התחרות והניצחון. יתר על כן, איננו חייבים לראות בהם משחקים כלל. לפי גישה זאת משחקי קונווי הם זוגות של קבוצות מבוססות היטב המוגדרים ברקורסיה כמו ב-2.9. היחס $\leq$ על זוגות אלו מוגדר ברקורסיה ברקורסיה לפי 2.21ב'. פעולות המינוס והחיבור מוגדרות ברקורסיה כמו ב-2.13 ו-2.15. ההפרש $x - y$ והיחסים $\equiv$, $<$, $\geq$ ו-$>$ מוגדרים כמו ב-2.19. נראה שגם בדרך זאת אנו יכולים להשתמש בכל מה שהוכחנו על משחקים אלו עד עתה. המשפטים 2.14 ו-2.16 הוכחו ישירות מהגדרות אלו. נמשיך ונוכיח מהגדרות אלו את המשפטים הבאים.

2.22 משפט. $x \leq y$ אםם $-y \leq -x$. (מ-2.21ב', באינדוקציה על x, y).

2.23 משפט. $x \leq y$ אםם $y - x \geq 0$. (באינדוקציה על x, y).

בגישה היוצאת מ-$\leq$ נגדיר עתה משחק כקדם-חיובי (קדם-שלילי) אם הוא $0 \leq$ $(0 \geq)$, וכחיובי אם הוא קדם חיובי ואינו קדם-שלילי. לפי 2.23 מתקיימת עתה הגדרה 2.19ב'. 2.21א' נובע מייד מהגדרת $\leq$ ב-2.21ב'.

2.25 למה. א. $0 < x$ $(0 > x)$ אםם x חיובי (שלילי).

ב. $x \equiv y$ אםם $x - y \equiv 0$.

ג. פעולת המינוס אדישה לשקילות, כלומר אם $x \equiv y$ אז $-x \equiv -y$.

2.26 משפט (טרנזיטיביות $\leq$). אם $x \leq y$ ו- $y \leq z$ אז $x \leq z$.
הוכחה באינדוקציה על x,y,z. עלינו להוכיח כי $x \leq z$, כלומר, לפי ההגדרה הרקורסיבית של $\leq$, $z^R \not\leq x$ ו- $z \not\leq x^L$. אם $z^R \leq x$ אז מכיוון ש- $x \leq y$ נובע מהנחת האינדוקציה $z^R \leq y$ בניגוד להגדרה הרקורסיבית של ההנחה $y \leq z$. אם $z \leq x^L$, אז מכיוון ש- $y \leq z$ אז לפי הנחת האינדוקציה $y \leq x^L$, בניגוד להגדרה הרקורסיבית של ההנחה $x \leq y$.

2.27 משפט. לכל x, $x \not\leq x^R$, $x^L \not\leq x$, ו- $x \leq x$.
הוכחה. שלושת החלקים מוכחים יחד באינדוקציה על x.

2.28 משפט. א. $x \equiv x$.
ב. $x - x \equiv 0$.
ג. יחס השקילות של המשחקים הוא יחס שקילות ומחלקות השקילות שלו הן סדורות חלקית ע"י $\leq$.
הוכחה. א' נובע מייד מ-2.27, ו-א' ו-ב' שקולים לפי 2.25ב'. בגישה באמצעות המשחקים אפשר להוכיח את ב' גם ישירות ע"י תיאור אסטרטגית הניצחון של השחקן המתגונן במשחק $x + (-x)$, שהיא לעשות בכל שלב בשני מבין המשחקים x ו-$-x$ את ההיפך ממה שעושה המתקיף באחד המשחקים.

2.29 משפט. א. אם $x \leq y$ אז $x + z \leq y + z$. (נובע מ-2.23 ו-2.16).
ב. אם x, y קדם-חיוביים אז גם $x + y$ קדם-חיובי. (נובע מא' ומטרנזיטיביות $\leq$).
ג. פעולת החיבור של משחקים אדישה לשקילות.
ד. מחלקות השקילות של המשחקים עם הפעולה על המחלקות המתקבלת מפעולת חיבור המשחקים, שגם לה נקרא חיבור, עם המחלקה של 0 כאיבר 0, עם הפעולה המתקבלת ממינוס כפעולת הנגדי, ועם היחס בין המחלקות המתקבל מ-$\leq$, מהוות חבורה חילופית סדורה חלקית.
ה. $x < y$ אםם $x + z < y + z$.

2.30 מספרים על ממשיים (סוריאליים) בדוגמאות של משחק ההאקנבוש ראינו שיש משחקים שבהם אפשר למדוד ע"י מספר את היתרון במהלכים שיש לאחד השחקנים על יריבו. נדגים זאת כאן ע"י גירסה טריביאלית של משחק הנים. נניח שבמשק זה יש שתי ערימות של דיסקיות עם l דיסקיות בערמה השמאלית ו-r דיסקיות בערמה הימנית. בגרסה הזאת L יכול לקחת דיסקיות רק מן הערמה השמאלית ו-R רק מן הערמה הימנית. מכיוון שכל שחקן רוצה לשרוד זמן רב ככל האפשר הוא יוריד בכל מהלך רק דיסקית אחת מן הערמה שלו. אם $l = r$ אז המשחק מאוזן כי לשחקן המתחיל ייגמרו הדיסקיות לפני שייגמרו ליריבו. אם $r < l$ אז לשחקן השמאלי יש יתרון של $l - r$ מהלכים על יריבו. אנו נאמר בכל מקרה שהערך של המשחק הוא $l - r$, ואם $l = r$ ערך זה הוא 0, וזה אומר שהמשחק מאוזן, ואם $l < r$ ערך המשחק הוא שלילי וזה אומר שיש ל-R יתרון של $|l - r|$ מהלכים.

הרעיון הוא, אם כן, לתת לכל משחק ערך שהוא היתרון של L על R במהלכים, ועם ערך זה הוא שלילי הוא מעיד על יתרון של R על L. זה עובד למשחקים בהם יש לכל שחקן משאבים שבכל מהלך הוא מבזבז משהו מהם. לא כל משחק הוא כזה. יש משחקים בהם כאשר שחקן משחק הוא דווקא משפר את מצבו, ולא מבזבז משאבים שיש לו. למשל, בכל משחק בו המתחיל מנצח, כמו במשחק $\{0 \mid 0\}$, השחקן המתחיל דווקא משפר את מצבו בזה שהוא משחק. נראה עתה כיצד לתרגם להגדרה מתמטית את הטענה שאם שחקן משחק הוא מרע את מצבו. בהינתן משחק x, אם L משחק אז המשחק עובר ל-x^L כלשהו ואם R משחק אז המשחק עובר ל-x^R כלשהו. אנו מסתכלים עתה על x^L ועל x^R כעל משחקים בפני עצמם, והטענה שמי שמשחק מאבד משהו מיתרגמת לכך ש-x^L לא יכול להיות טוב ל-L (ורע ל-R) לפחות כמו x^R, ונראה ב-2.31 ש-x^L ממש פחות טוב ל-L (ויותר רע ל-R) מאשר x^R.

אנו יכולים לתת ערך רק למשחקים שהם משחקי בזבוז משאבים, ואת זאת נעשה עתה. תחילה נראה עתה מהי משמעות מושגי החיוביות והסדר למשחקים בעלי ערך. משחק נקרא קדם חיובי אם כאשר R מתחיל בו אז L מנצח. זה יכול לקרות בדיוק אז כאשר אין ל-R כל יתרון, וזה קורה בדיוק כשערך המשחק ≤ 0. משחק בעל ערך שערכו 0 הוא מאוזן כי שני השחקנים מתחילים עם משאבים שווים והמתחיל בזבז משהו לפני שיריבו בזבז, ומשחק שערכו אינו אפס יש בו יתרון לאחד השחקנים ולכן הוא ינצח, גם כאשר הוא מתחיל. לכן משחק בעל ערך הוא חיובי הוא בדיוק כאשר ערכו חיובי.

לכל משחק x בעל ערך גם $-x$ הוא בעל ערך וערכו הוא מינוס הערך של x כי זהו אותו משחק כמו x בהחלפת תפקידי השחקנים השונים, ולכן היתרון של שחקן אחד עובר לשני. הסכום של שני משחקים בעלי ערך הוא משחק

בעל ערך שערכו הוא סכום הערכים של שני המשחקים. למשל, אם בשני המשחקים יש יתרון לשחקן השמאלי אז מכיוון שהוא משחק בכל שלב באחד משני המשחקים המחוברים עומד לרשותו גם עודף המהלכים במשחק הראשון וגם בשני. כתוצאה ממה שאמרנו על הערך של $-x$ ושל $x+y$, נובע שאם x ו-y הם בעלי ערך אז גם $x-y$ הוא בעל ערך וערכו הוא הפרש הערכים של x ו-y. כך $x < y$ אסם $y - x$ חיובי, אסם ערך $y - x$ חיובי, אסם ערך y פחות ערך x הוא חיובי, אסם ערך x קטן מערך y.

כפי שאמרנו הרעיון במשחק בעל ערך הוא שבכל צעד השחקן מבזבז משהו מן המשאבים שלו, ובמילים אחרות הוא מקטין את היתרון שלו. לכן כל אופציה שמאלית של משחק x היא בעלת ערך קטן מזה של x וכל אופציה ימנית של x היא בעלת ערך גדול מזה של x (כי הערך הוא היתרון של השחקן השמאלי, שהוא יריבו של הימני).

כפי שאמרנו לעיל, משחקים בלי ערך יהיו משחקים בהם לא קיים $x^R \geq x^L$ לאף x^L ו-x^R. כמו כן, מכיוון שאנו רוצים להשאר במסגרת של משחקים בעלי ערך נעסוק רק בכאלו שכל האופציות שלהם הן בעלות ערך. למשחקים כאלו נקרא מספרים על-ממשיים או מספרי קונווי, ובקיצור מספרים, כי אלו ישמשו אותנו כמספרים.

הגדרה. משחק x הוא **מספר קונווי**, ובקיצור **מספר**, אם כל האופציות שלו הן מספרים ואף אופציה ימנית שלו אינה קטנה או שווה מאופציה שמאלית שלו.

2.31 למספר x קיים שלכל האופציות שלו $x^L < x$ ו- $x < x^R$. (באינדוקציה על x).

2.32 משפט. א. למספרים x, y קיים $x \leq y$ או $y \leq x$.

ב. $<$ הוא יחס סדר על מחלקות השקילות של המספרים.

2.33 משפט. למספרים x, y קיים:

א. $x \leq y$ אסם לכל y^R $x < y^R$ ולכל x^L $x^L < y$.

ב. $x \equiv y$ אסם לכל x^L, x^R, y^L, y^R קיים $y^L < x < y^R$ ו- $x^L < y < x^R$.

ג. $x < y$ אסם קיים x^R כך ש- $x^R \leq y$ או שקיים y^L כך ש- $x \leq y^L$.

(האם $x < y$ גורר כל אחד משני תנאים אלו?)

הוכחה. נובע מ-2.21ב' ו-2.32.

2.34 משפט. א. 0 הוא מספר.

ב. אם x מספר גם $-x$ כן.

ג. אם x, y מספרים גם $x + y$ כן.

ד. מחלקות השקילות של המספרים הם תת-חבורה סדורה של חבורת מחלקות השקילות של המשחקים.

הוכחה. ב. באינדוקציה על x, תוך שימוש ב-2.22.

ג. באינדוקציה על x, y תוך שימוש ב-2.29.

2.35 משפט. נאמר שקבוצת משחקים B חוסמת מלעיל (מלרע) את קבוצת המשחקים A אם לכל $x \in A$ קיים $y \in B$ כך ש- $x \leq y$ ($y \leq x$). נאמר ש- A ו- B נגמרות (מתחילות) יחד אם כל אחת מהן חוסמת מלעיל (מלרע) את חברתה.

א. אם Y_L חוסמת מלעיל את X_L ו-X_R חוסמת מלרע את Y_R אז $x \leq y$. (השתמש ב-2.21ב' וב-2.27).

ב. אם X_L ו- Y_L נגמרות יחד ו-X_R ו-Y_R מתחילות יחד אז $x \equiv y$.

ג. אם יש ב-X_L איבר מירבי l וב-X_R איבר מזערי r אז $X = \{l \mid r\}$.

ד. אם $X_R = \emptyset$ ו-l איבר מירבי ב- X_L אז $X = \{l \mid\}$, ואם $X_L = \emptyset$ ו-r איבר מזערי ב- X_R אז $X = \{\mid r\}$.

ה. אם משחק y מתקבל ממשחק x ע"י החלפת אופציות של x במשחקים שקולים להם אז $x \equiv y$.

מכאן ואילך נעסוק כמעט תמיד רק במספרים ולא במשחקים אחרים. לכן x, y, z, אם או בלי אינדקסים, יסמנו מספרים, X, Y, Z, אם או בלי אינדקסים, יסמנו קבוצות של מספרים וכו', אלא אם נאמר במפורש אחרת.

את הגדרת הסדר למספרים אנו יכולים לנסח כך: $x < y$ אסם קיים $x \leq y^L$ או $x^R \leq y$. במלים אחרות, $x \leq y$ אסם לכל $x^L < y$ ולכל $x < y^R$.

2.36 משפט הביניים. יהיו y משחק ו- x מספר כך ש- $y^L \not\geq x \not\geq y^R$ לכל y^L ו- y^R (וזה בוודאי קיים כאשר $y^L < x < y^R$) וכך שאף אופציה של x אינה בעלת תכונות אלו, אז $x \equiv y$.

למשל, אם כל האופציות השמאליות של y הן שליליות וכל האופציות הימניות של y הן חיוביות אז 0 מקיים את הדרישות ל-x ולכן $y \equiv 0$.

הוכחה. נניח $x \not\leq y$, אז או שקיים y^L כך ש- $x \leq y^L$, וזה בניגוד לנתון, או שקיים x^R כך ש- $x^R \leq y$, ועלינו להראות שגם זה מביא לסתירה. לפי הנחת המשפט על האופציות של x או שקיים $x^R \leq y^L$ עבור y^L מסויים, אולם אז, מכיוון ש-x מספר, $x < x^R \leq y^L$, בניגוד להנחת המשפט, או שקיים $y^R \leq x^R$ ומכיוון שאנו עוסקים במקרה בו $x^R \leq y$ מתקבל $y^R \leq y$ בניגוד ל-2.27.
הטיפול במקרה בו $y \not\leq x$ דומה.

2.37 מסקנה. א. אם x הוא מספר ו-y הוא משחק כך ש- $X_L \supseteq Y_L$, $X_R \supseteq Y_R$, וקיים $Y_L < x < Y_R$ (ודי אפילו בכך ש- $y^L \not\geq x \not\geq y^R$ לכל y^L ו- y^R), אז $x \equiv y$.
ב. אם x, z מספרים כך ש- $X_L, Z_L < x, z < X_R, Z_R$ אז $z \equiv x$.

משפט הביניים הוא המשפט המרכזי המשמש לחישוב והשוואת מספרים, ומסקנות חשובות שלו תוכחנה עתה.

2.38 משפט הפשטות. נאמר שמשחק x פשוט ממשחק y אם x נברא לפני y. אם $X < Y$ קבוצות מספרים אז $X|Y$ שקול למספר פשוט ביותר הנמצא בין X ל-Y (ולכן ישנו בדיוק אחד כזה, עד כדי שקילות).

הוכחה. יהי x מספר בין X ו-Y שהוא בעל יום בריאה מזערי מבין המספרים הנמצאים בין שתי קבוצות אלו, אז x נמצא בין שתי קבוצות אלו ואף אופציה שלו אינה נמצאת בין שתי קבוצות אלו, כי היא נבראה לפני x. לכן, לפי משפט הביניים, $X|Y \equiv x$.

2.38.1 מסקנה. יהי A רצף של מספרים, כלומר קבוצת מספרים לא ריקה כך שאם $x < y < z$ ו- $x, z \in A$ גם $y \in A$.
א. יהי α היום הראשון בו נברא איבר כלשהו של A. אז $\{x < A : \rho(x) < \alpha\} \mid \{x > A : \rho(x) < \alpha\}$ הוא המספר היחיד (עד כדי שקילות) הנמצא ב-A ושנברא ראשון מבין איברי A. מספר זה נקרא **המספר המוביל ב-**A.
הערה: הסיבה שבחרנו במספר $\{x < A : \rho(x) < \alpha\} \mid \{x > A : \rho(x) < \alpha\}$ ולא ב- $\{x : x < A\} \mid \{x : x > A\}$ שהגדרתו פשוטה יותר היא ש- $\{x : x < A\} \mid \{x : x > A\}$ אינו משחק כי לכל יום β קיימים ימים מאוחרים מ-β בהם נבראים מספרים גדולים מאיברי A ומספרים קטנים מאיברי A ולכן לא קיים יום כל שכל המספרים ב- $\{x : x < A\}$ וב- $\{x : x > A\}$ נבראו לפניו. תחליף ל"מספר" $\{x : x < A\} \mid \{x : x > A\}$ נמצא ב-ב'.
ב. אם $B \subseteq \{x : x < A\}$, $C \subseteq \{x : x > A\}$ ו- $B \mid C \in A$ אז $B \mid C$ הוא המספר המוביל ב-A.

2.38.2 הגדרות. א. יהיו x, y מספרים. נאמר ש-y **עוטף** את x אם $Y_L < x < Y_R$, Y_L חוסם מלעיל את X_L, ו-Y_R חוסם מלרע את X_R.
ב. נקרא למספר x **מספר טרי** אם הוא מספר פשוט ביותר במחלקת השקילות שלו.

2.38.3 משפט העטיפה. אם מספר y עוטף את המספר x אז $x \equiv y$.

הוכחה. יהי z מספר פשוט ביותר בין X_L ל-X_R אז לפי משפט הפשטות $x \equiv z$. מכיוון ש-y עוטף את x קיים $Y_L < x < Y_R$, ומכיוון ש- $x \equiv z$ קיים גם $Y_L < z < Y_R$. מכיוון ש-y עוטף את x כל מספר הנמצא בין Y_L ו-Y_R נמצא גם בין X_L ו-X_R, ולכן z הנמצא בין Y_L ו-Y_R הוא גם המספר הפשוט ביותר בין שתי קבוצות אלו, ולפי משפט הפשטות $y \equiv z$. לכן קיים $x \equiv z \equiv y$.

2.38.4 משפט העטיפה ההפוך. אם המספרים x, y שקולים ו-x הוא מספר טרי אז y עוטף את x.

הוכחה. מכיוון ש- $y \equiv x$ קיים $Y_L < x < Y_R$. x הוא מספר פשוט ביותר הנמצא בין Y_L ל-Y_R כי אחרת קיים משפט פשוט ביותר z בין Y_L ל-Y_R שנברא לפני x, ולפי משפט הפשטות $x \equiv y \equiv z$, בניגוד להנחתנו ש-x טרי.

נוכיח עתה כי Y_L חוסמת מלעיל את X_L, וההוכחה ש-Y_R חוסמת מלרע את X_R היא דומה. יהי $z \in X_L$, עלינו להוכיח שלא קיים $z < Y_L$. מכיוון ש- $z \in X_L$, קיים $z < x \equiv y < Y_R$. אילו היה $z < Y_L$ אז היה $Y_L < z < Y_R$. z פשוט מ-x כי $z \in X_L$, בניגוד למה שראינו כי x הוא מספר פשוט ביותר בין Y_L ל-Y_R.

2.38.4 תרגיל. האם משפט העטיפה ההפוך קיים גם ללא ההנחה שהמספר x טרי?

2.39 הסודרים כמספרים. נגדיר העתקה * של מחלקת הסודרים למחלקת המספרים ברקורסיה ע"י $\alpha^* = \{\beta^* : \beta < \alpha \mid\}$. במיוחד, $0^* = \{\mid\} = 0$, ו- $1^* = \{0 \mid\}$.

2.40 משפט. א. לכל α α^* הוא מספר.
ב. אם $\alpha<\beta$ אםם $\alpha^*<\beta^*$.
ג. לכל α $(\alpha+1)^*=\alpha^*+1^*$.
ד. לכל α ומספר טבעי n $(\alpha+n)^*=\alpha^*+n^*$.
ה. לכל סודר גבולי α, $\beta<\alpha$ ומספר טבעי n קיים $\beta^*<\alpha^*-n^*$.
ו. ל-n טבעי חיובי קיים $-n^*=\{|-(n-1)^*\}=\{|-(n-1)^*,-(n-2)^*,\ldots,-1^*,0^*\}$, ובמיוחד $-1^*=\{|0\}$.
ז. אם α סודר עוקב ו-β הסודר הקודם לו אז $\alpha^*=\{\beta^*|\}$ ו-β^* הוא α^*-1^*.
ח. לכל סודר גבולי α ומספר טבעי n קיים $\alpha^*-n^*=\{\beta^*,\beta<\alpha\mid\alpha^*-(n-1)^*,\alpha^*-1^*,\alpha^*\}$.

מכאן ואילך נזהה בדרך כלל את α^* עם α ונקרא ל-α^*-ים סודרים. למשל, $\{0|\}=1$. זיהוי זה שומר על הסדר ועל החיבור של מספרים טבעיים. הוא אינו שומר על החיבור של סודרים כלשהם, כפי שנראה בפרק ד'.

2.41 תרגיל. לכל משחק x קיים $\rho(x-1),\rho(x+1)\leq\rho(x)+1$.

2.42 משפט. א. לכל משחק x קיים סודר α גדול או שווה לו. (באינדוקציה על x, ועם 2.33).
ב. לכל מספר x $\langle X_L,\emptyset\rangle$ הוא הסודר המזערי שהוא $x\leq$. (לפי א' ומשפט הביניים).
ג. לכל קבוצת סודרים A $\langle A,\emptyset\rangle$ הוא הסודר המזערי הגדול מכל איברי A. (לפי א' ומשפט הביניים).

שקילות ושיוויון. לפי 2.34 מחלקות השקילות של מספרי קונוויי הן חבורה ביחס לפעולת החיבור. המספרים עצמם אינם חבורה לגבי החיבור כי ל-$x\neq0$ לא קיים y כך ש- $x+y=0$ (קיים רק y כך ש- $x+y\equiv0$). לכן מה שמכליל את המספרים השלמים והממשיים אלו הן מחלקות השקילות של מספרי קונוויי ולא המספרים עצמם. לכן, מכאן ואילך, כאשר נדבר על מספרים נתכוון על פי רוב למחלקות השקילות שלהם, ובהתאם נסמן את השקילות בסימן השיוויון $=$. כך, כשנאמר, למשל, כי $x=0$ נתכוון שמחלקות השקילות של x ו-0 הן אותה מחלקה והמספרים x ו-0 שקולים. כאשר נדבר על אופציות של מספר x נתכוון, כמובן, למספר x עצמו ולא למחלקת השקילות שלו. תמיד יהיה ברור מן ההקשר אם אנו מתכוונים למספר עצמו או למחלקת השקילות שלו. כולנו רגילים זה זמן רב למצב זה של כפל משמעות מן המספרים הרציונליים. כאשר אנו מדברים על המספרים הרציונליים אנו מתכוונים בדרך כלל למחלקות השקילות של השברים, ולכן אנו כותבים $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$, אבל כאשר אנו אומרים שהמכנה של $\frac{6}{8}$ הוא 8 אנו מתכוונים לשבר עצמו. ליום הבריאה של מחלקת שקילות נחשב היום הראשון בו נברא איבר של המחלקה.

כדי להגיע לשלמים השליליים נזכיר תחילה את המשפט הבא.

2.44 שיכון השלמים בחבורה. תהי G חבורה חיבורית ו- $a\in G$, אז קיים הומומורפיזם יחיד h של חבורת השלמים Z לתוך G המקיים $h(1)=a$. אם $a\neq0$ ו-G חסרת פיתול, וזה בוודאי קיים כאשר G חבורה סדורה, אז h הוא שיכון. אם G חבורה סדורה ו- $a>0$ אז h גם שומרת סדר.

2.45 שיכון השלמים במספרי קונווי. יהי h השיכון של חבורת השלמים במספרי קונוויי הקיים לפי 2.44 עם $h(1)=1^*$. אז קיים לכל n טבעי $h(n)=n^*$.
כתוצאה מכך אנו יכולים לכתוב n^* במקום $h(n)$ לכל n שלם.

הוכחה. נוכיח זאת באינדוקציה על n. מכיוון ש-h הומומורפיזם קיים $h(0)=0=0^*$. לפי הנחת האינדוקציה ו-2.40ג' קיים $h(n+1)=h(n)+h(1)=n^*+1^*=(n+1)^*$.

2.46 כפל מספר במספר רציונלי. תהי A חבורה חסרת פיתול, וזה כולל את המקרה ש-A חבורה סדורה. יהי $a\in A$ ויהי k מספר טבעי חיובי. אם קיים $b\in A$ כך ש-$a=kb$ אז b זה יחיד, ואנו מסמנים אותו ב- $\frac{1}{k}a$. אנו מסמנים ב- $\frac{m}{k}a$ את האיבר $m(\frac{1}{k}a)$, ואיבר זה שווה ל- $\frac{1}{k}(ma)$.

2.47 המספר $\frac{1}{2}$. המשחק $\{0\mid1\}$ הוא המספר $\frac{1}{2}$.

הוכחה. נקרא למשחק זה a, וברור שהוא מספר. אפשר להוכיח שהוא $\frac{1}{2}$, כלומר ש- $a+a=1$, ע"י שמראים שהמשחק $a+a-1$ מאוזן. אנו נוכיח זאת ע"י שימוש במשפט הביניים, כי את זה אפשר להכליל לכל השברים הדיאדיים. לפי הגדרת החיבור $a+a=\{a+0\mid a+1\}=\{a\mid1+a\}$. נפעיל את משפט הביניים על אגף ימין $\{a\mid1+a\}$ ועל המספר 1. לפי 2.31 $0<a<1$ ולכן $a<1<1+a$, אולם האופציה היחידה של 1 שהיא 0 איננה בין a ל- $1+a$, ולכן $\{a\mid1+a\}=1$.

2.48 משפט. כל שבר מצומצם x עם מכנה 2^n הוא מספר קונוויי הנתון ע"י $x = \{x - \frac{1}{2^n} \mid x + \frac{1}{2^n}\}$.

הוכחה. באינדוקציה על n. ל-$n = 0$ x הוא מספר שלם וקל לראות, בשימוש במשפט הביניים, כי $x \equiv \{x-1 \mid x+1\}$.
ל- $n > 0$ המספר $2x$ הוא, לפי הנחת האינדוקציה, מספר קונוויי, ועלינו למצוא מספר קונוויי z כך ש- $2z = 2x$ ו-z זה יהיה מספר קונוויי x. מכיוון ש-x הוא שבר מצומצם עם מכנה 2^n לכן $x - \frac{1}{2^n}$ ו- $x + \frac{1}{2^n}$ הם מספרים דיאדיים עם מכנה המחלק את 2^{n-1} ולכן, לפי הנחת האינדוקציה, מספרים אלו הם מספרי קונוויי. יהי

$$z = \left\{x - \frac{1}{2^n} \;\middle|\; x + \frac{1}{2^n}\right\}$$

ואז

$$2z = \left\{z + \left(x - \frac{1}{2^n}\right) \;\middle|\; z + \left(x + \frac{1}{2^n}\right)\right\}$$

לפי 2.31

$$x - \frac{1}{2^n} < z < x + \frac{1}{2^n}$$

ולכן קיים

$$2x - \frac{1}{2^{n-1}} < z + \left(x - \frac{1}{2^n}\right) < z + \left(x + \frac{1}{2^n}\right) < 2x + \frac{1}{2^{n-1}} \tag{1}$$

חיבור $\frac{1}{2^{n+1}}$ לשני אגפי אי-השיוויון השמאלי ב-(1) וחיסור $\frac{1}{2^{n+1}}$ משני אגפי אי-השוויון הימני ב-(1) נותן את אי-השיוויונות

$$x + z - \frac{1}{2^n} < 2x < x + z + \frac{1}{2^n} \tag{2}$$

לפי (2) $2x$ הוא בין האופציות של $2z$. לפי הנחת האינדוקציה

$$2x \equiv \left\{2x - \frac{1}{2^{n-1}} \;\middle|\; 2x + \frac{1}{2^{n-1}}\right\} \tag{3}$$

ולפי (1) האופציות של $2x$ ב-(3) אינן בין האופציות של $2z$ ולכן, לפי משפט הביניים, $2x = 2z$, ולכן z הוא מספר קונוויי שאנו מזהים אותו עם x.

2.49 מסקנה. לכל שלם m ומספר טבעי n קיים $\left\{\frac{m}{2^n} \mid \frac{m+1}{2^n}\right\} = \frac{2m+1}{2^{n+1}}$.

2.50 תרגיל. א. כל מספר דיאדי נברא ביום סופי.

ב. בכל יום סופי נברא רק מספר סופי של מספרים.

ג. כל המספרים הנבראים בימים הסופיים הם מספרים דיאדיים.

רמז: באינדוקציה על יום הבריאה. למספר x התבונן במספר $\frac{m}{2^n}$, עם ה-n הטבעי המזערי, הנמצא בין האופציות השמאליות והימניות של x.

2.51 תרגיל. א. לכל סודר גבולי α ומספר טבעי n קיים $\{\alpha - n\} \mid \alpha = (n+1) - \alpha$.

[טפל תחילה במקרה $n = 0$.]

ב. יהי $z = \{0, 1, 2, \ldots \mid \ldots, \omega - 2, \omega - 1, \omega\}$. אז z הוא מספר ו- $z = \frac{\omega}{2}$.