פרק א': קבוצות מבוססות היטב וגרפים מבוססים היטב

1.1 קבוצות. אנו נניח שהעצמים היחידים בעולם הם הקבוצות. הנחה זאת היא רק ענין של נוחיות, באותה מידה יכולנו להניח שבעולם ישנם גם עצמים שאינם קבוצות אבל העצמים בהם אנו עוסקים יהיו כולם קבוצות שהן עצמן מתקבלות מקבוצות, וכן הלאה. עתה משטיהרנו את עולמנו מן העצמים שאינם קבוצות נטהר אותו גם מקבוצות שנוצרו שלא כדרך הטבע. האם קיימת קבוצה x כך ש-$x \in x$? למרות שקיום קבוצה כזאת אינו מפריע בדרך כלל במתמטיקה קבוצה כזאת נראית לנו מוזרה. מדוע? הגישה האינטואיטיבית שלנו לקבוצות היא שקבוצה נבנית מעצמים שהיו קיימים לפני בניית הקבוצה, ולכן כאשר אנו בונים את הקבוצה x מעצמים מסוימים x עצמה אינה אחד מעצמים אלו. קבוצה מוזרה אחרת היא קבוצה x שיש לה איבר y כך ש- $x \in y$. מכיוון ש- $y \in x$ y היתה צריכה להיווצר לפני x, אולם מצד שני $x \in y$ ולכן x היתה צריכה להיווצר לפני y.

נשאל עוד שאלה בכוון זה. האם קיימת קבוצה x כך שקיימת סידרה אינסופית $x_0, x_1, \ldots$ של קבוצות כך ש- $x_0 = x$ ולכל i טיבעי קיים $x_{i+1} \in x_i$, כלומר $\ldots \in x_2 \in x_1 \in x$? כדי לענות על שאלה זאת אנו צריכים להתבונן מעט יותר בתהליך היצירה של הקבוצות. כל קבוצה נוצרת בנקודת זמן כלשהיא שהיא מאוחרת מנקודות הזמן בהן נוצרו איברי הקבוצה. בנקודות הזמן יש לנו מוקדם ומאוחר, כלומר הן סדורות בסדר מלא, ועלינו לראות מהו סדר זה. בפיסיקה נקודות הזמן מסודרות בסדר של המספרים הממשיים. כאן אנו מעוניינים בדרישה אחרת והיא שאם משהו קורה במשך תהליך יצירת הקבוצות אז הוא קורה לראשונה בנקודת זמן כלשהיא. לשם כך אנו זקוקים לכך שלכל קבוצה לא ריקה של נקודות זמן תהיה נקודת זמן הקודמת לכל יתר נקודות הזמן בקבוצה, וזה אומר שנקודות הזמן מסודרות היטב. חמושים בהנחה זאת נתבונן שוב בסידרה $x_0, x_1, \ldots$ המקיימת $x_0 = x$ ו- $\ldots \in x_2 \in x_1 \in x$. לכל i טבעי, הקבוצה x_i נוצרת בנקודת זמן t_i. מכיוון ש- $x_{i+1} \in x_i$ x_{i+1} נוצרה לפני x_i ולכן t_{i+1} קודמת ל-t_i, ולכן בקבוצה $\{t_i \mid i \in \omega\}$ אין נקודת זמן t_n הקודמת לכל נקודת זמן אחרת בקבוצה זאת, בסתירה להנחתנו שקבוצה זאת סדורה היטב. כך אם אנו מקבלים את ההנחה שכל קבוצה נוצרת בנקודת זמן כלשהי, אחרי שכל איבריה נוצרו, ושנקודות הזמן מסודרות בסדר טוב אז לא קיימת סידרה $x_0, x_1, \ldots$ של קבוצות כך ש- $\ldots \in x_2 \in x_1 \in x_0$. אם ברצוננו לאמץ את ההנחה שכל קבוצה נוצרת בזמן כלשהו, ושנקודות הזמן מסודרות כפי שהזכרנו, אז איננו צריכים להכניס פורמלית לתורת הקבוצות את מושג הזמן ודי לנו לוסיף לאקסיומות תורת הקבוצות את האקסיומה שלא קיימת סידרה $x_0, x_1, \ldots$ של קבוצות כך ש- $\ldots \in x_2 \in x_1 \in x_0$. אקסיומה זאת נקראת **אקסיומת היסוד** (Axiom of Foundation). בספרות המתמטית, היכן שמציגים את אקסיומות תורת הקבוצות לצורך ביסוס הפעילות המתמטית הרגילה, פעמים רבות לא מזכירים את אקסיומת היסוד כי קיום אותן סדרות אינסופיות שאקסיומת היסוד מונעת את קיומן אינו מפריע לפעילות בענפי המתמטיקה השונים. אנו נראה בהמשך ניסוח אחר של אקסיומת היסוד.

כדי לראות את הדיון שלנו באור כללי יותר לא נאמץ את אקסיומת היסוד, ונגדיר כי קבוצה x תיקרא **מוזרה** אם קיימת סידרה $x_0, x_1, \ldots$ של קבוצות כך ש- $x_0 = x$ ו- $\ldots \in x_2 \in x_1 \in x_0$. קבוצה שאינה מוזרה נקראת **מבוססת היטב** (well founded). אקסיומת היסוד אומרת שאין קבוצות מוזרות, כלומר שכל הקבוצות מבוססות היטב. נשים לב כי קבוצה x המקימת $x \in x$ היא מוזרה כי $\ldots \in x \in x \in x$ וקבוצה x שיש לה איבר y המקיים $x \in y$ היא מוזרה כי $\ldots \in y \in x \in y \in x$. לכן מאקסיומת היסוד נובע שלא קיימות קבוצות x משני הסוגים שהזכרנו זה עתה.

1.2 משפט. קבוצה x היא מבוססת היטב אםם כל איבריה מבוססים היטב.

תנאים שקולים לכך שקבוצה היא מבוססת היטב נמצאים במשפטים 1.4 ו-1.7.

1.3 הגדרה. **קבוצת הקודמים ל-x** היא קבוצת כל העצמים y שהם איברים של x, איברים של איברים של x, וכן הלאה. הגדרה פורמלית של קבוצה זאת היא כדלקמן. נסמן ב-$\cup x$ - קבוצת האחוד של x - את קבוצת איברי האיברים של x. נגדיר ברקורסיה: $\cup^0 x = x$ ולכל n טיבעי $\cup^{n+1} x = \cup \cup^n x$. קבוצת הקודמים ל-$x$ היא $\bigcup_{n=0}^{\infty} \cup^n x$. השם הטכני המקובל לקבוצה זאת הוא **הסגור הטרנזיטיבי** (transitive closure) של x ולכן מקובל לסמנה ב-$\mathrm{Tc}(x)$.

1.4 משפט. קבוצה x היא מבוססת היטב אם בכל קבוצה y לא ריקה שהיא חלקית לקבוצת הקודמים ל-x ישנו איבר זר ל-y. לכן אקסיומת היסוד שקולה לטענה שבכל קבוצה y יש איבר זר לה.

הוכחה. בכוון האחד, נניח ש-x אינה מבוססת היטב, כלומר שקיימת סידרה $x_0, x_1, \ldots$ של קבוצות כך ש- $x_0 = x$

ו- $\ldots \in x_2 \in x_1 \in x_0$. ברור כי לכל $n > 0$ x_n נמצא בקבוצת הקודמים ל-x. לכן הקבוצה $y = \{x_n \mid n > 0\}$ היא קבוצה חלקית לקבוצת הקודמים ל-x ואין לה איבר זר לעצמה כי $x_n \cap y$ מכיל את x_{n+1}.

בכוון השני, תהי $y \subseteq \mathrm{Tc}(x)$ לא ריקה שאף אחד מאיבריה אינו זר לה. יהי $z \in y$ אז $z \in \mathrm{Tc}(x)$ ולכן קיימים $x_0, \ldots, x_k$ כך ש- $x_0 = x$, $x_k = z$ ולכל $n < k$ $x_{n+1} \in x_n$. נגדיר עתה ברקורסיה את $x_n \in y$ עבור $n > k$ כך ש- $x_{n+1} \in x_n$. ל- $n \geq k$, מכיוון ש- $x_n \in y$ (ל- $n = k$ זה נתון לנו, ול- $n > k$ זה נובע מן ההגדרה של x_n) ואיברי y אינם זרים ל-y ישנו איבר ב- $x_n \cap y$, ונסמן איבר כזה ב-x_{n+1}. מכיוון ש- $\ldots \in x_2 \in x_1 \in x$ כל איברי הסידרה $x_0, x_1, \ldots$ נמצאים בקבוצת האבות של x ולכן סידרה זאת מעידה ש-x אינה מבוססת היטב.

1.5 ההיררכיה V_α של בריאת הקבוצות. אנו השתמשנו במושג הזמן בו נוצרת קבוצה ליצירת המסגרת האינטואיטי-בית להגדרת מושג הקבוצה המבוססת היטב, אבל לא היינו זקוקים למושג זה להגדרה עצמה ולהוכחת 1.4. עם זאת, להשלמת התמונה האינטואיטיבית ולצרכים עתידיים מסויימים נטפל עתה בצורה מסודרת במושג ה"זמן". בפיזיקה הזמן הוא מספר ממשי ואילו בתורת הקבוצות הזמן הוא סודר. לכן נדבר על יום 0, יום 1, וכו', ואף על יום ω, יום $\omega + 1$ וכו'. בריאת השמיים והארץ הסתיימה ביום השישי, אבל נראה כי בניית הקבוצות נמשכת תמיד. ב-V_α אנו מתכוונים לקבוצת הקבוצות שנבראו לפני יום α, ונגדיר את V_α ברקורסיה כדלקמן. $V_0 = \emptyset$, כי שום דבר לא נברא לפני יום 0. $V_{\alpha+1}$ היא קבוצת החזקה של V_α, כלומר $x \in V_{\alpha=1}$ אסם $x \subseteq V_\alpha$, וזה אומר ש-x קיים ביום V_α אסם כל איבריו נבנו לפני יום זה. לסודר גבולי α $V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$.

1.6 משפט א. כל V_α היא קבוצה טרנזיטיבית, כלומר כל איבר שלה הוא קבוצה חלקית שלה, כלומר כל איבר של איבר שלה הוא איבר שלה. (הוכחה באינדוקציה על α).

ב. לכל α $V_\alpha \subseteq V_{\alpha+1}$. (נובע מ-א').

ג. אם $\alpha \leq \beta$ אז $V_\beta \subseteq V_\alpha$. (באינדוקציה על α תוך שימוש ב-ב').

1.7 משפט. קבוצה x היא מבוססת היטב אסם היא נמצאת בקבוצה V_α עבור α כלשהו.

הוכחה. נוכיח תחילה כי לכל סודר α כל איבר של V_α הוא מבוסס היטב. את זה מוכיחים באינדוקציה על α תוך שימוש ב-1.2.

כעת נראה שכל קבוצה x שאינה באף V_α היא מוזרה. תהי y קבוצה שכל איבר שלה נמצא ב-V_α כלשהו. לכל $z \in y$ נסמן ב-α_z את ה-α המזערי כך ש- $z \in V_\alpha$ ויהי $\beta = \sup_{z\in y} \alpha_z$. לפי 1.6ג' $y \subseteq V_\beta$ ולכן $y \in V_{\beta+1}$, כלומר גם y עצמה נמצאת באיזשהו V_α. לכן אם x אינה נמצאת בעף V_α אז יש לה איבר z שאינו נמצא באף V_α. כך אנו יכולים להגדיר, ברקורסיה, סידרה $\ldots \in x_{n+1} \in x_n \in \ldots \in x_2 \in x_1 = x$ שכל אחד מאיבריה אינו נמצא באף V_α, ולכן x היא מוזרה.

1.8 יום הבריאה של קבוצה, או דרגת הקבוצה. לפי הגדרת V_α V_α מכילה קבוצות שלא היו ב-V_β עבור $\beta < \alpha$ רק אם α סודר עוקב $\gamma + 1$ וקבוצות חדשות אלו הן הקבוצות שנבראו ביום γ. לכן נגדיר את יום הבריאה $\rho(x)$ של קבוצה מבוססת היטב x כסודר γ המזערי כך ש- $x \in V_{\gamma+1}$. $\rho(x)$ נקרא גם הדרגה של x.

משפט. לכל קבוצה מבוססת היטב x קיים $\rho(x) = \sup^+_{y\in x} \rho(y)$, כלומר $\rho(x)$ הוא הסודר המזערי הגדול מכל הדרגות של איברי x, ובמילים אחרות, x נברא מייד אחרי בריאת כל איבריו.

מכאן ואילך היכן שנדבר על קבוצה נתכוון לקבוצה מבוססת היטב, ונזכיר זאת במפורש רק במקומות בהם הדבר משמעותי במיוחד.

1.9 גרף מכוון. זה $\langle G, \to \rangle$ היכן ש-$\to$ יחס דו מקומי על G.

לאיברי G נקרא גם בשם **צמתים**.

בסימן G נסמן גם את קבוצת הצמתים וגם את הגרף $\langle G, \to \rangle$ כולו.

דוגמא: G היא קבוצת תחנות האוטובוסים, וקיים xGy אם קיים קו אוטובוס העוצר ב-x ותחנתו הבאה היא y.

בן של צומת x הוא צומת y כך ש- $x \to y$.

בור הוא צומת שאין לו בנים.

מסילה בגרף זאת סידרה, $\langle x_i \mid 0 \leq i < \lambda \rangle$ של איברי G היכן ש- $\lambda \leq \omega$ וכך שלכל $0 < i < \lambda$, קיים $x_{i-1} \to x_i$, כלומר כל צומת במסילה הוא בן של הקודם לו. ברור שכל קטע של מסילה הוא מסילה.

מסילה $\langle x_i \mid i < n \rangle$ נקרא **מסילה מ-x ל-y** אם $x_0 = x$ ו- $x_{n-1} = y$. אנו נאמר ש-y הוא **צאצא** של x אם קיימת

מסילה מ-x ל-y.

ברור כי כל בן של x הוא צאצא של x. דוגמא: בדוגמא דלעיל, מסילה זאת מסלול נסיעה המתחיל בתחנה אחת ומגיע לתחנה כלשהי, כולל החלפת אוטובוסים בדרך.

גרף עם שורש פירושו גרף מכוון עם צומת מיוחד הנקרא **שורש הגרף** שאנו רואים בו צומת שהמסילות העיקריות מתחילות ממנו וכך שלכל צומת x בגרף קיימת מסילה מן השורש אל x. (המינוח שורש לקוח מגרפים מכוונים שהם עצים).

אנו מייצגים גרף עם שורש כמבנה $G = \langle G, g_0, \to \rangle$ היכן ש- $\langle G, \to \rangle$ גרף ו-$g_0 \in G$ הוא השורש של G.

גרף מבוסס היטב הוא גרף שכל מסילה בו היא סופית.

מסילה סגורה בגרף זאת מסילה $\langle x_i \mid i < n \rangle$ עם $n > 0$ אשר בה $x_0 = x_{n-1}$. דוגמאות: א. אם x הוא צומת שהוא בן של עצמו אז הסידרה $\langle x, x \rangle$ היא מסילה סגורה. ב. אם יש בגרף מסילה סגורה $\langle x_i \mid i < n \rangle$ אז הוא אינו מבוסס היטב כי הסידרה האינסופית $\langle x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_1, \ldots, x_{n-1}, \ldots \rangle$ היא מסלול בגרף.

ג. גרף סופי שאין בו מסלול סגור הוא מבוסס היטב.

ד. קבוצת הזוגות של המספרים הטבעיים עם היחס כך ש- $x \to y$ אם y קודם ל-x בסדר המילוני היא גרף אינסופי מבוסס היטב.

ה. תהי G קבוצה כלשהי של קבוצות ויהי $x \to y$ אם $y \in x$. אקסיומת היסוד של תורת הקבוצות אומרת בדיוק שכל גרף כזה מבוסס היטב.

גרף מיוחד הוא גרף עם שורש מבוסס היטב.

לכל צומת x בגרף G תהי G_x הקבוצה שאיבריה הם x וכל צאצאיו. אנו קוראים לקבוצה זאת בשם **השבט** של x. ב-G_x אנו מסמנים גם את הגרף עם שורש שצומתיו הם איברי השבט של x, שהשורש שלו הוא x ושהיחס שלו הוא $\to$, מוגבל לקבוצה G_x. אם הגרף G מבוסס היטב אז גם G_x כן. ברור כי עבור בור x קיים $G_x = \{x\}$.

1.10 אינדוקציה על הצמתים בגרף מבוסס היטב. תהי $\mathfrak{T}$ תכונה של צמתים בגרף. $\mathfrak{T}$ נקראת **תכונה אינדוקטיבית** אם קיים התנאי הבא:

לכל צומת x, אם כל בניו הם בעלי התכונה $\mathfrak{T}$ אז גם x הוא בעל התכונה $\mathfrak{T}$.

אם $\mathfrak{T}$ היא תכונה אינדוקטיבית אז ברור כי כל בור x הוא בעל התכונה $\mathfrak{T}$, כי זה נכון באופן ריק שכל בניו הם בעלי התכונה $\mathfrak{T}$.

משפט. יהי G גרף מבוסס היטב ו-$\mathfrak{T}$ תכונה אינדוקטיבית של צמתים ב-G. אז כל צומת ב-G הוא בעל התכונה $\mathfrak{T}$.

הוכחה. אם ישנו צומת x שאינו בעל התכונה $\mathfrak{T}$ אז, מכיוון ש-$\mathfrak{T}$ היא תכונה אינדוקטיבית, יש ל-x בן שגם הוא אינו בעל התכונה $\mathfrak{T}$, וכן הלאה, וכך אפשר ליצור מסלול אינסופי, המתחיל ב-x, של צמתים שאינם בעלי התכונה $\mathfrak{T}$, בסתירה להנחה ש-G מבוסס היטב.

במקביל אנו קוראים לקבוצה $H \subseteq G$ **קבוצה אינדוקטיבית** כאשר היא בעלת התכונה הבאה:

לכל צומת x, אם כל בניו נמצאים ב-H אז גם x עצמו נמצא ב-H. כעת ברור שבגרף מבוסס היטב, אם קבוצה H היא אינדוקטיבית אז H היא כל G.

1.11 תרגיל. הוכח כי אפשרות להוכיח באינדוקציה שקולה לדרישה שהגרף מבוסס היטב.

רמז. אם H ענף אינסופי ב-G הפעל את האינדוקציה על התכונה $\mathfrak{T}$ של צומת x האומרת ש-x אינו ב-H.

1.12 הגדרה ברקורסיה על גרף מבוסס היטב. אנו רוצים להגדיר פונקציה F על הצמתים של גרף מבוסס היטב, באופן שערך הפונקציה בצומת x ייקבע לפי x עצמו ולפי הערכים של F על בניו של x. ניגש לניסוח מדוייק של דרישה זאת. הקבוצה $\{y \mid x \to y\}$ היא קבוצת הבנים של x. הפונקציה $F \restriction \{y \mid x \to y\}$ הנה ההגבלה של F לקבוצת הבנים של x. להגיד שהערך $F(x)$ של F ב-x נקבע לפי ערכי F בבנים של x פירושו ש- $F(x)$ נקבע לפי ההגבלה $F \restriction \{y \mid x \to y\}$ של F לקבוצת הבנים של x. הניסוח המדוייק של מה שאמרנו על F הוא שקיימת פונקציה דו מקומית R הקובעת את הערך $F(x)$ לפי x ולפי $F \restriction \{y \mid x \to y\}$, כלומר קיים לכל x

$$F(x) = R(x, F \restriction \{y \mid x \to y\}) \qquad (1)$$

(1) היא דרישה מן הפונקציה F, ובוודאי אינה הגדרה מפורשת של F כי F מופיעה גם בצד ימין של (1). כדי לדעת שאמנם יש פונקציה F המקיימת את (1) לכל הצמתים של x של G יש להוכיח זאת.

תחילה נשים לב שלמרות שאיננו יודעים כרגע אם קיימת F כנדרש, (1) מאפשר לנו לחשב את הערכים של F, בהנחה שהיא אמנם קיימת, עבור x-ים רבים, וההוכחה תראה שמכיוון שהגרף הוא מבוסס היטב אז אלו הם באמת כל ה-x-ים.

לפני שניגש לזאת ננהיג את הסימונים הבאים.

לפונקציה f אנו מסמנים ב-$\mathrm{Dom} f$ את התחום של f, כלומר את קבוצת העצמים x עבורם $f(x)$ מוגדר.

עבור ביטוי $\tau(x)$ וטענה $\phi(x)$ הביטוי $\langle \tau(x) \mid \phi(x) \rangle$ יסמן את הפונקציה שתחומה הוא קבוצת כל ה-x-ים המקיימים את $\phi(x)$, וערכה, לכל x בתחומה הוא $\tau(x)$. כך למשל, מכיוון ש-ω היא קבוצת המספרים הטבעיים, $\langle 2n \mid n \in \omega \rangle$ היא הפונקציה G שתחומה היא קבוצת כל המספרים הטבעיים, ולכל מספר טבעי n $G(n) = 2n$.

עבור x שהוא בור (1) היא הגדרה מפורשת כי עבור x כזה (1) הוא $F(x) = R(x, F \restriction \emptyset)$ ו- $F \restriction \emptyset$ היא הפונקציה הריקה שאנו מסמנים אותה ב-$\emptyset$, ולכן עבור x זה (1) הוא $F(x) = R(x, \emptyset)$.

יהי כעת x צומת שכל בניו בורות. עבור x זה קיים, מכיוון שכל $x \to y$ y הוא בור,

$$F \restriction \{y \mid x \to y\} = \langle F(y) \mid x \to y \rangle = \langle R(y, \emptyset) \mid x \to y \rangle$$

ולכן

$$F(x) = R(x, F \restriction \{y \mid x \to y\} = R(x, \langle R(y, \emptyset) \mid x \to y \rangle)$$

שים לב שזאת נוסחה מפורשת ל-$F(x)$ עבור x זה, כי כאן F אינו מופיע באגף ימין.

כעת אנחנו יכולים לחשב את $F(x)$ עבור צומת x שכל אחד מבניו הוא או בור או צומת שכל בניו בורות, וכן הלאה. נשים לב שבכל שלב של החישוב שלנו חישבנו את $F(x)$ רק אחרי שחישבנו את $F(y)$ לכל בן y של x. במילים אחרות, בכל שלב של החישוב שלנו הקבוצה H של הצמתים שעבורם כבר חישבנו את ערך F היא כזאת שלכל צומת x אם x ב-H אז גם כל בן של x נמצא ב-H. לכן נגדיר כדלקמן.

1.13 הגדרה. א. $H \subseteq G$ נקראת **קבוצה תורשתית** אם לכל צומת הנמצא ב-H גם כל בניו ב-H.

ב. פונקציה f נקראת **חישוב** אם תחומה היא קבוצה תורשתית ולכל x בתחומה קיים

$$f(x) = R(x, f \restriction \{y \mid x \to y\}) \qquad (2)$$

נשים לב שמכיוון ש- $x \in \mathrm{Dom} f$, כל y בקבוצה $\{y \mid x \to y\}$ גם הוא ב- $\mathrm{Dom} f$ ולכן $\mathrm{Dom}(f \restriction \{y \mid x \to y\}) = \{y \mid x \to y\}$.

ג. בהנתן שתי פונקציות f ו-g אנו אומרים שהן **מתיישבות** אם הן מתלכדות על החיתוך של תחומיהן, כלומר אם $x \in \mathrm{Dom} f \cap \mathrm{Dom} g$ אז $f(x) = g(x)$.

ברור כי אם שתי פונקציות עם אותו תחום מתיישבות אז הן שוות זו לזו.

1.14 למה . כל שני חישובים הם מתיישבים.

הוכחה. מוכיחים באינדוקציה על x שאם $x \in \mathrm{Dom} f \cap \mathrm{Dom} g$ אז $f(x) = g(x)$.

1.15 יחידות הפונקציה המוגדרת ברקורסיה. פונקציה F המוגדרת ברקורסיה על G היא חישוב ולכן לפי 1.13 כל שתי פונקציות כאלו הן שוות.

1.16 למה . א. אחוד של קבוצות תורשתיות הוא קבוצה תורשתית.

ב. אחוד של קבוצת פונקציות שכל שתיים מהן מתיישבות הוא פונקציה.

ג. אחוד של חישובים הוא חישוב.

1.17 למה. לכל $x \in G$ קיים חישוב f שתחומו מכיל את x.

הוכחה. באינדוקציה על x. לפי הנחת האינדוקציה קיים לכל בן y של x חישוב f_y שתחומו מכיל את y. (אם הנך רוצה f_y מסויים כזה צא מ-f_y כלשהוא והגבל אותו לקבוצה שאיבריה הם x וכל צאצאיו). תהי g האחוד של כל ה-f_y-ים הללו. $\mathrm{Dom} g$ מכיל לכן את כל הבנים של x, ולפי 1.15ג' g היא חישוב. אם $x \in \mathrm{Dom} g$ אז גמרנו, אחרת נבחר $f = g \cup \{\langle x, R(x, g \restriction \{y \mid x \to y\}) \rangle\}$. בדיקה שגרתית מראה ש-$f$ הוא חישוב, וכמובן ש- $x \in \mathrm{Dom} f$.

1.18 קיום הפונקציה המוגדרת ברקורסיה. לפי 1.16ג' איחוד כל החישובים הוא חישוב. לפי 1.17 תחומו של איחוד זה הוא G, ולכן הוא הפונקציה F המוגדרת ברקורסיה על G.

1.19 הגדרת יום הבריאה ברקורסיה. אנו יכולים להתבונן במחלקת הקבוצות המבוססות היטב כבגרף בו $x \to y$ מוגדר ע"י $y \in x$. בגרף זה אנו יכולים להגדיר את פונקצית הדרגה ברקורסיה ע"י השוויון $\rho(x) = \sup^{+}_{y \in x} \rho(y)$ של 1.8. כך הגדרנו את יום הבריאה של x ללא שימוש בפונקציה V_α, והגדרנו ישירות את יום הבריאה $\rho(x)$ של הקבוצה x כיום המזערי הגדול מכל ימי הבריאה של איברי x.