האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתימטיקה

בחינה בלוגיקה מתימטית (1) (32408)

סמסטר הסתיו – תשס"ד – מועד ב'

המורה: פרופ' עזריאל לוי הזמן: שעתיים

הבחינה מחולקת לשני חלקים. על התלמיד לענות על כל חלקי השאלה בחלק א' ועל שתי שאלות בחלק ב'.

כשהנך משתמש בהגדרת האמת של תחשיב היחסים אינך חייב להשתמש ב-$\max$ וב-$\min$ והנך רשאי להשתמש בתאור עברי מדוייק. למשל במקום $\ldots = \max_{a\in A} \ldots$ אתה רשאי לומר "$T = \ldots$ אסם קיים $a \in A$ כך ש- $T = \ldots$".

חלק א': ענה על שאלה מס' 1

1. ענה בקצרה על השאלות א'-ד' הבאות. תשובה על כל אחת משאלות אלו צריכה להיות באורך של כחמש שורות לכל היותר.

א. נניח שהיינו מוסיפים את הקשר xor כקשר פסוקי דו מקומי בסיסי לשפת תחשיב היחסים. (זכור כי $\phi \,\mathrm{xor}\, \psi$ משמעותו שבדיוק אחד מ-ϕ ו-ψ הוא נכון). איך היה אז נעשה הטיפול בפסוק $\phi \,\mathrm{xor}\, \psi$ בעץ האמת? במילים אחרות, מה היה כלל עץ האמת המתאים לקשר זה? תן הסבר מלא של הדרישות שהיה עליך למלא בקביעת אופן הטיפול.

ב. בשאלה זאת ψ היא תמיד נוסחה שהמשתנה x אינו חופשי בה. לגבי כל אחת משתי הגרירות הבאות הוכח שהגרירה קיימת לכל הנוסחאות ϕ ו-ψ, או המצא נוסחאות ϕ ו-ψ שעבורן הגרירה אינה קיימת.

(i) $\forall \mathrm{x}(\phi(\mathrm{x}) \to \psi) \models \exists \mathrm{x}\phi(\mathrm{x}) \to \psi$

(ii) $\forall \mathrm{x}\phi(\mathrm{x}) \to \psi \models \exists \mathrm{x}\phi(\mathrm{x}) \to \psi$

ג. הוכח שקבוצת הפסוקים האמיתיים לוגית בשפה מתאימה של תחשיב היחסים מסדר שני אינה כריעה חיובית.

ד. יהי ϕ פסוק בתחשיב הפסוקים ויהי $\psi = \mathrm{sub}(\phi; P; P \vee R)$ הפסוק המתקבל ממנו ע"י הצבת $P \vee R$ עבור הפסוק היסודי P.

(i) אם ϕ הוא טאוטולוגיה, האם גם ψ חייב להיות טאוטולוגיה?

(ii) אם ψ הוא טאוטולוגיה, האם גם ϕ חייב להיות טאוטולוגיה?

בכל אחד מ(i) ו-(ii) אם התשובה היא חיובית הוכח אותה ע"י ציטוט משפט כללי הנוגע לא רק לטאוטולוגיות, ואם התשובה שלילית אז הבא דוגמה נגדית.

חלק ב׳: ענה על שתים מבין השאלות 2 עד 4 הבאות.

תשובותיך על השאלות צריכות לכלול הוכחות מלאות וברורות, אלא אם נאמר במפורש שאין צורך להוכיח. הקפד לצטט באופן מלא וברור את המשפטים בהם הנך משתמש. אם תענה על שלוש השאלות אז ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות.

2. א. הגדר מתי נוסחה ϕ של תחשיב היחסים היא טאוטולוגיה.
ב. הוכח שכל טאוטולוגיה כזאת היא אמיתית לוגית.
ג. הוכח את המשפט העיקרי עליו אתה מסתמך ב-ב׳.

3. הבא דוגמה לכלל היסק חד מקומי $\frac{\phi}{\psi}$ (שים לב שכל כלל היסק חייב להיות נאות) ופסוקים מסויימים ϕ ו-ψ כך ש-ψ מתקבל מ-ϕ ע"י כלל ההיסק אבל ϕ אינו גורר את ψ. עליכם להוכיח את כל טענותיכם, ובפרט שכלל ההיסק הוא נאות.

4. תהי Γ קבוצת פסוקים כריעה.
א. הוכח שקבוצת המסקנות הלוגיות של Γ היא כריעה חיובית.
ב. הוכח שאם Γ שלמה, כלומר אם לכל פסוק ϕ קיים $\Gamma \models \phi$ או $\Gamma \models \neg\phi$, אז קבוצת המסקנות הלוגיות של Γ היא כריעה.